

桑莹泉, 刘有山, 徐涛, 白志明, 解桐桐. 2021. 远震波场正演模拟方法及应用. 地球与行星物理论评, 52(6): 569-586. doi: 10.16738/j.dqyxx.2021-011

Sang Y Q, Liu Y S, Xu T, Bai Z M, Xie T T. 2021. Forward modeling method and application of teleseismic wavefield. Reviews of Geophysics and Planetary Physics, 52(6): 569-586. doi:10.16738/j.dqyxx.2021-011

## 远震波场正演模拟方法及应用

桑莹泉<sup>1,2</sup>, 刘有山<sup>1,3</sup>, 徐涛<sup>1,3</sup>, 白志明<sup>1,3</sup>, 解桐桐<sup>1,2</sup>

1 中国科学院地质与地球物理研究所 岩石圈演化国家重点实验室, 北京 100029

2 中国科学院大学, 北京 100049

3 中国科学院地球科学研究院, 北京 100029

**摘要:** 地震波场数值模拟是壳幔结构成像和深部探测的重要基础. 经典的远震波场数值模拟主要基于一维地球模型, 包括解析法、半解析法和数值法等. 这些算法能够高效地计算理论地震图, 但由于将地球假设为一维层状介质, 难以考虑介质的横向非均匀性对地震波场的影响. 近年来随着计算机性能的不提高, 三维地震波场数值模拟方法得到快速发展, 并被广泛用于局部/区域地震波场模拟及壳幔结构成像. 然而由于计算成本较高, 实现全球尺度模型的高频地震波场数值模拟仍存在较大挑战, 因而基于远震波场的混合数值模拟方法逐渐得到关注和应用. 远震波场混合数值模拟法将全球模型分解为全球区域和局部区域, 在全球区域中采用一维地球模型近似, 应用快速算法计算一维模型中的全球高频理论地震图; 在局部目标区域内采用三维数值方法(谱元法、有限差分法等)和注入技术, 模拟地震波在三维非均匀介质中的传播, 从而在波场计算的效率和精度之间达到平衡. 随着密集台阵观测的普及, 对地下结构成像的分辨率提出了更高的要求, 准确高效的远震波场混合模拟方法在高分辨率地震成像领域将发挥日益重要的作用. 本文系统地总结了远震波场数值模拟的一维模拟方法, 并在此基础上重点介绍远震波场混合数值模拟方法的原理及应用.

**关键词:** 远震波场模拟; 壳幔结构成像; 理论地震图; 混合法

doi: 10.16738/j.dqyxx.2021-011

中图分类号: P315

文献标识码: A

## Forward modeling method and application of teleseismic wavefield

Sang Yingquan<sup>1,2</sup>, Liu Youshan<sup>1,3</sup>, Xu Tao<sup>1,3</sup>, Bai Zhiming<sup>1,3</sup>, Xie Tongtong<sup>1,2</sup>

1 State Key Laboratory of Lithospheric Evolution, Institute of Geology and Geophysics,  
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China

2 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

3 Innovation Academy for Earth Science, CAS, Beijing 100029, China

**Abstract:** Seismic wavefield numerical simulation is an important base for crust-mantle structure imaging and deep exploration. The classical teleseismic wavefield simulation methods, including analytical method, semi-analytical method and numerical method, are mainly based on one-dimensional Earth model. These algorithms can efficiently calculate the synthetic seismogram, but the lateral heterogeneity of the medium is not being incorporated. With the improvement of computer performance, numerical simulation methods for three-dimensional seismic have been developed rapidly, and have been widely used in both local and regional seismic wave simulations. But due to the limitation of computing resources, the implementation of high frequency seismic wavefield numerical simulation based on global scale is still a great challenge. In recent years, hybrid numerical simulation methods of teleseismic wavefield have been developed, in which the target simulation region is decomposed into two scales (global

收稿日期: 2021-03-09; 录用日期: 2021-04-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(41774100, 41874065, 41804060)

Supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41774100, 41874065, 41804060)

第一作者: 桑莹泉(1998-), 男, 硕士生, 主要从事地震学研究. E-mail: sangyq@mail.iggcas.ac.cn

scale and local scale). In global scale, high-frequency synthetic seismogram is calculated through fast algorithm based on one-dimensional earth model assumption. With injection method, three-dimensional numerical methods (spectral element method, finite difference method, etc.) are used to simulate the propagation of seismic wave in three-dimensional heterogeneous medium in local target scale, to achieve the balance between efficiency and accuracy. With the development of dense array observation, scientific research puts forward higher requirements for the resolution of underground structure imaging. Accurate and efficient hybrid simulation method of seismic wavefield will play an important role in the field of high-resolution seismic imaging. In this paper, we systematically summarize one-dimensional simulation methods of teleseismic wavefield numerical simulations, as well as the principle and application of hybrid numerical simulation methods of teleseismic wavefield.

**Key words:** teleseismic wavefield simulation; crust-mantle structure imaging; synthetic seismograms; hybrid method

## 0 引言

天然地震事件的发生在时间和空间分布上都存在着强烈的非均匀性, 全球大多数地震发生在板块边界, 如环太平洋俯冲带、地中海—喜马拉雅地震带、海岭地震带等 (Turcotte and Schubert, 2002). 对于地震活动较弱的地区, 可利用这些远震记录, 通过地震学成像方法研究其壳幔结构 (Nolet, 2008; Tong et al., 2014a). 近年来, 随着高性能计算和三维地震波场数值模拟技术的发展, 使得对地球深部三维非均匀速度结构的成像成为可能. 一些针对全球尺度的深部结构成像技术, 如远震伴随层析成像, 得到了快速发展 (Liu and Gu, 2012; 张明辉等, 2019), 但是该类方法对远震波场正演算法精度要求较高. 因此, 发展远震波场数值模拟方法对于提高岩石圈成像分辨率, 认识地震波在地球内部传播的规律和特征, 以及揭示地球内部构造以及动力演化进程至关重要 (Monteiller et al., 2013).

传统的全球尺度地震波场数值模拟主要基于一维地球模型来计算, 通过对介质模型和波动方程做出相应简化得到其解析解或数值解来实现 (谢小碧等, 1992; 姚振兴和郑天愉, 1994). 这些方法主要可以分为三类: 第一类为解析法, 通过对介质的简化和波动方程近似得到波动方程的解析表达式. 例如广义射线法 (GRT) (Helmberger, 1968)、WKBJ 法 (Chapman, 1978; Chapman and Orcutt, 1985)、简振模法 (normal modes) (Dahlen and Tromp, 1998) 等. 这类方法计算效率高, 但是只能模拟一维层状模型. 第二类为半解析法, 通过将波动方程分解为一系列的常微分方程组, 从而对波动方程进行求解, 例如 WKM 法 (Ni et al., 2000, 2003)、离散波数法 (DWN) (Bouchon and Aki, 1977)、

频率波数域法 (FK) (Thomson, 1950) 等. 这类方法由于对介质的简化, 从而减小了计算量, 能够快速高效地进行波场数值模拟计算. 第三类为数值解法, 如直接法 (DSM) (Geller and Ohminato, 1994)、轴对称谱元法 (AxiSEM) (Nissen-Meyer et al., 2007a, 2007b, 2008, 2014) 等. 国内早期对这三类方法也开展了大量研究工作 (例如, 姚振兴, 1979, 1980; 李幼铭等, 1980; 王椿镛, 1982; 朱良保, 1989; 朱仁益, 1990 等). 基于一维地球模型的地震图快速算法虽然计算效率较高, 但均基于一维介质假设, 无法实现真正的三维非均匀介质的波场数值模拟.

得益于计算机存储和计算能力的提升, 数值求解双程波动方程以模拟地震波在复杂介质中的传播已经成为现实 (Komatitsch et al., 2004). 近年来发展的三维非均匀波动方程数值模拟方法, 例如有限差分法 (FD) (Alterman and Karal, 1968)、有限元法 (FEM) (Lysmer et al., 1972)、谱元法 (SEM)

(Komatitsch and Tromp, 1999; Liu et al., 2017b) 等得到了广泛应用. 尽管这些数值方法能够模拟地震波在复杂的三维非均匀介质中的传播, 但其计算成本高, 对于周期小于 8 s 的全球尺度的地震波场进行数值模拟仍存在着一定的挑战 (Liu and Gu 2012; Monteiller et al., 2013; Li et al., 2014). 为了降低计算成本, 地震学家提出将三维波场数值模拟限制在一个较小尺寸的局部三维区域中, 即构建混合方法来计算高频远震地震波场. 混合方法分为两步: 第一步, 在一维地球模型中模拟从震源到目标区域边界的地震波, 计算地震波在一维地球模型中传播的背景波场; 第二步, 利用注入方法 (injection method), 将第一步计算的虚拟边界处的背景波场作为入射场, 用波动方程数值方法模拟局部非均匀

区域的三维波场 (Bielak and Christiano, 1984; Fäh et al., 1994)。

混合方法的思想最早可以追溯到 1968 年, 在这一开创性工作中, Alterman 和 Karal (1968) 将均匀全空间中的一维快速算法与有限差分 (FD) 方法相结合, 以研究地震波在分层半空间中的传播问题, 后来有大量研究对其进行了改进和发展 (Bielak and Christiano, 1984; Fäh et al., 1994; Zahradnik and Moczo, 1996; Robertsson and Chapman, 2000; Bielak et al., 2003; Yoshimura et al., 2003; Opršal et al., 2010; Monteiller et al., 2013; Baker and Roecker, 2014; Tong et al., 2014a, 2014b; Dmitry et al., 2015; Monteiller et al., 2015; Wang et al., 2016; Masson and Romanowicz, 2017a, 2017b; Beller et al., 2018b; Clouzet et al., 2018)。除了有限差分法, Bielak 和 Christiano (1984) 在有限元法的框架内开发了两步混合方法, 用以研究建筑—土壤—地基的耦合问题, 其他研究人员也发展出其它的两步/混合方法。例如, 简正振型和有限差分法 (Carcione et al., 1988; Fäh et al., 1993, 1994); 有限元和边界积分法 (Mita and Luco, 1987; Bielak et al., 1991); 以及将离散波数法、有限差分法和有限元结合 (Moczo et al., 1997); 广义射线法和有限差分法混合 (温联星和姚振兴, 1994; Wen and Helmberger, 1998a; Zhao et al., 2008) 等。Zahradnik 和 Moczo (1996) 提出了利用离散波数法计算地震波在一维地球模型中传播的背景场和有限差分法计算二维区域场相结合的混合方法。Wen 和 Helmberger (1998a) 发展了一套 P-SV 混合方法, 将广义射线理论和有限差分法 (简称 GRT-FD) 相结合, 解决在核幔边界附近超低速区域的波场传播问题。随后, Wen (2002) 将 GRT-FD 方法推广到模拟 SH 波在同类模型中的传播; Zhao 等 (2008) 实现了 GRT-FD 的混合方法计算二维各向异性非均匀介质的理论波形。Roecker 等 (2010) 基于有限差分法实现了 2.5-D 非均匀区域入射平面波的传播。

基于规则网格的有限差分 (FD) 方法在处理实际问题中的强烈地表起伏三维模型时往往受到限制 (Liu et al., 2017c; 刘有山等, 2013, 2014)。为了克服这一问题, 有学者发展了一些将有限元 (FEM)/谱元法 (SEM) 与快速算法相结合的混合方法。Capdeville 等 (2003a) 提出将谱元法和简正振型相结合的三维混合方法。Monteiller 等 (2013) 将直接法 (DSM) 与谱元法 (SEM) 相结合, 发展了直接

法—谱元法 (DSM-SEM) 混合方法, 并将该方法用于远震波场的伴随层析成像中 (Monteiller et al., 2015)。除了直接法 (DSM), Tong 等 (2014a, 2014b) 利用了计算量更小的 FK 算子作为混合方法背景场计算方法, 发展了三维谱元法—频率波数域法 (SEM-FK)。Beller 等 (2018b) 采用轴对称谱元法—谱元法 (AxiSEM-SEM) 混合方法研究了西南阿尔卑斯山脉的岩石圈结构。

本文将系统地介绍常用的远震波场一维模拟方法, 以及一些主流混合波场数值模拟方法的原理及应用。

## 1 一维地球模型波场数值模拟

### 1.1 解析法

解析法是基于高频近似合成地震记录非常有效的手段, 主要包括广义射线法、WKBJ 和简正振型等。解析法计算效率较高, 但对于有限频率, 解析法不够精确, 无法提供相比于波动方程的精确或完备解。解析法的精度足以解决许多三维地震波传播的实际问题, 而且这些问题很难用其他方法高效解决。

#### (1) 广义射线法

广义射线理论 (GRT) 是基于 Laplace 变换的 Cagniard-de Hoop 方法, 由于远震波可以通过初动近似来计算, 因此分层介质中每一层中的射线初动 (包括反射波和首波) 在时间域都可以得到解析解 (Helmberger, 1974; Helmberger and Harkrider, 1978)。广义射线法适用于计算水平层状或近似水平层状介质中远场、中低频等某些震相, 对于层数较多或近场高频情况, 由于转换波和多次反射、折射波等, 计算量将大大增加 (李旭和陈运泰, 1996)。

在  $z$  轴朝下的柱坐标系  $(r, \theta, z)$  中, 点源在拉普拉斯域的波动方程可以写为:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{s^2}{c^2} \phi = 0 \quad (1)$$

利用分离变量法, 可以得到点源情况下全空间下的通解:

$$\phi(r, \theta, z, s) = \sum_{n=0, \pm 1, \dots} e^{-in\theta} \int_0^{\infty} A_n(k) J_n(kr) e^{-|k|z} dk \quad (2)$$

式中:

$$v = \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \quad (3)$$

式中,  $A_n$ 由初始条件决定.

对于液体全空间中的爆炸源, 为得到压力场  $\phi(t)$ 的时间域解, 需要两次积分, 一个关于  $k$  (不含  $-\frac{M_0}{4\pi\rho c^2}$ ):

$$\phi(s) = \frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{k}{v} J_0(kr) e^{-\nu|z|} dk \quad (4)$$

另一个是对  $\phi(s)$ 进行拉普拉斯逆变换.

Cagniard-de Hoop 方法可以同时进行双重积分. 通过变量替换  $k = -isp$ , 利用:

$$J_0(-isp) = \frac{i}{\pi} (K_0(spr) - K_0(-spr)) \quad (5)$$

式 (4) 变为:

$$\begin{aligned} \phi(s) &= -\frac{i}{\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{p}{\eta} K_0(spr) e^{-s\eta|z|} dp \\ &= \frac{2}{\pi} \Im \int_0^{i\infty} \frac{p}{\eta} K_0(spr) e^{-s\eta|z|} dp \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\Im$ 表示取虚部, 且:

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{c^2} - p^2} \quad (7)$$

$x$ 较大时, 式 (6) 变为 (为了简便只取第一项):

$$\phi(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi r s}} \Im \int_0^{i\infty} \frac{\sqrt{p}}{\eta} e^{-s(pr+\eta|z|)} dp \quad (8)$$

为了写成拉普拉斯变换的形式, 令:

$$t = pr + \eta|z| \quad (9)$$

式中,  $t$ 为正实数. 因而问题变为, 在式 (9) 中  $p = p(t)$ 应有图 1 所示的积分路径  $C$ , 此积分路径称为 Cagniard 路径 (图 1).

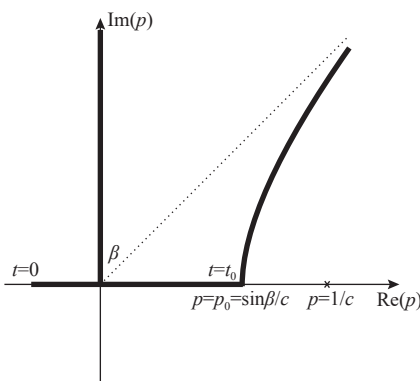


图 1 复  $p$  平面上的 Cagniard 路径  
Fig. 1 Cagniard-de Hoop contour

将正实数  $t$  作为一个参数, 它可从零变至无穷大, 那么由式 (9), 可解得:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{rt}{R^2} - \frac{\sqrt{t_0^2 - t^2}}{R^2} |z|, t < t_0, \\ \frac{rt}{R^2} + i \frac{\sqrt{t^2 - t_0^2}}{R^2} |z|, t > t_0, \end{cases} \quad (10)$$

式中,  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ ,  $t_0 = \frac{R}{c}$ . 由于除了沿实数  $p$  轴  $p > \frac{1}{c}$ , 积分函数是解析的, 因此积分路径  $[0, i\infty]$  可以变成沿着 Cagniard 路径:

$$J(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \Im \int_0^{i\infty} \frac{\sqrt{p}}{\eta} e^{-s(pr+\eta|z|)} dp \right\} = \Im \left\{ \frac{\sqrt{p}}{\eta} \frac{dp}{dt} \right\} \quad (11)$$

因此压力场的解为:

$$\phi(t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{r}} \frac{1}{\sqrt{t}} * J(t) \quad (12)$$

由于  $\frac{dp}{dt}$ 在  $t = t_0$ 时对  $J(t)$ 的贡献最大, 也就是初至. 利用其在  $t_0$ 处的近似, 可以得到初动近似的解:

$$\phi(t) = \frac{1}{\pi R} \frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{H(t-t_0)}{\sqrt{t-t_0}} = \frac{H(t-t_0)}{R} \quad (13)$$

这与精确解相同.

### (2) WKBJ 法

WKBJ 方法起源于 WKB 理论, 该理论为线性微分方程提供了一个近似解. WKB 是由三位著名学者 Wentzel、Kramer 和 Brillouin 的姓名首字母命名. 在地震学中, 由于 Jeffreys (还有 Rayleigh) 对它的早期发展做出了贡献, 通常被称为 WKBJ 方法. 最先由 Chapman (1976) 以及 Wiggins (1976) 用不同的方法得到了 WKBJ 地震记录. 后来, Chapman (1978) 推广了这一结果. Dey-Sarka 和 Chapman (1978) 给出了该方法的一些数值例子. Chapman 和 Orutt (1985) 讨论了该方法在深部地球模型中的应用, 并与 FK 方法的一维合成结果进行了对比. Chapman 和 Drummond (1982) 将 WKBJ 方法扩展到二维, 称为 Maslov 理论. Graves 和 Helmberger (1988) 应用这种方法成功模拟了多个 S 波震相 (S、SS 等). 与广义射线理论不同, WKBJ 法先进行频率反变换, 然后在实路径上进行波数积分. WKBJ 方法的优点在于只要采用已有的常微分方程近似解法 (WKBJ 法), 使中间结果直观且容易解释. 然而, WKBJ 地震图并不能较好地处理介质速度梯度问题, 因为它无法模拟来自梯度的低频反射, 这是 WKBJ 近似所固有的不足. 因为在解表达式中其频率和空间是解耦的, 解在深度  $z$  上的相对振幅仅取决于该深度的模型参数

(Paulssen, 1988) .

从频率域二维标量波动方程开始简单介绍其原理 (Chapman, 1978):

$$\nabla^2 \phi + \omega^2 v^{-2}(z) \phi = 0 \quad (14)$$

为得到方程 (14) 的近似解, 要求  $\omega$  足够大. 测试解的形式如下:

$$\phi(\omega, \mathbf{x}) = \phi_o(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{(n)}(\mathbf{x})}{(-i\omega)^n} e^{i\omega T(\mathbf{x})} \quad (15)$$

将展开式代入方程 (14), 并令  $\omega^2$  项的系数之和为零, 得到程函方程:

$$(\nabla T)^2 - v^{-2}(z) = 0 \quad (16)$$

设  $\omega$  任意次幂项之和为零, 得到振幅系数  $A^{(n)}(\mathbf{x})$ .

在高频情况下, 仅考虑 WKBJ 渐近展开的前导项, 从而得到 WKBJ 的近似解:

$$\phi(\omega, \mathbf{x}) = \phi_o(\omega) A^{(0)}(\mathbf{x}) e^{i\omega T(\mathbf{x})} \quad (17)$$

这就是我们熟知的几何射线理论的解.

对于两点边值问题, 通常存在几种  $T(\mathbf{x})$  和  $A^n(\mathbf{x})$  的解. 因此, 在零阶 WKBJ 近似中可以写成:

$$\phi(\omega, \mathbf{x}) = \phi_o(\omega) \sum_{j=1}^{\text{rays}} A_j^{(0)}(\mathbf{x}) e^{i\omega T_j(\mathbf{x})} \quad (18)$$

式中, “rays” 代表解的数量.

需要注意的是, 只有在速度分布连续的情况下, 零阶近似才有效. 或者, 更一般地说, 为了确定渐近展开中的第  $n$  项, 模型参数的第  $n$  阶导数必须是连续的. 因此, 如果遇到速度不连续, WKBJ 近似将会失效. 这种情况下, 需要利用 Snell 定律和适当的反射和透射系数得到界面处的解.

上述几何射线理论在 WKBJ 地震记录中的推广涉及空间坐标到慢度域的额外傅里叶变换. WKBJ 合成地震图的关键是逆变换的顺序: 在进行空间坐标变换之前, 首先将频率慢度域中的解变换到时域. 对慢度的逆变换为 (Dey-Sarkar and Chapman, 1978):

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{-1}{\pi \sqrt{2}} \phi_o(t) * \partial_t \text{Im} \left[ \Lambda(t) * \int_{-\infty}^{\infty} A^{(0)}(p, z) \delta(t - \theta(p, \mathbf{x})) dp \right] \end{aligned} \quad (19)$$

式中:

$$\Lambda(t) = \lambda(t) + i\bar{\lambda}(t) \quad (20)$$

其中,  $\lambda(t) = H(t)t^{-1/2}$ ,  $\bar{\lambda}(t) = H(-t)(-t)^{-1/2}$ .

$$\theta(p, \mathbf{x}) = \tau(p, z) + px \quad (21)$$

对于  $t = \theta(p, \mathbf{x})$ , 得到:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{-1}{\pi \sqrt{2}} \phi_o(t) * \partial_t \text{Im} \left[ \Lambda(t) * \sum_{t=\theta} \frac{A^{(0)}(p, z)}{|\partial_p \theta|} \right] \quad (22)$$

对于实  $t = \theta$ , 逆变换是精确的. 然而, 对于某些慢度  $p$ ,  $\tau(p, z)$  是复数, 会产生指数衰减相位项. 在 WKBJ 地震图方法中, 反变换只在  $p$  为实数的等值线上进行.

### (3) 简正振型 (normal modes)

简正振型是远震波场数值模拟中应用最广泛的方法之一. 1960 年智利大地震后, 地震学家对简正振型进行了大量的研究, 并逐渐发展出简正振型叠加 (normal mode summation) (Florsch et al., 1991; Yang et al., 2010; Gualtieri et al., 2013; Liu and Zhang, 2017). Gilbert (1971) 首先提出了用振型叠加的形式表示位移, 并给出了相关振型的特征函数的显式表示. Singh 和 Ben-Menahem (1969a, 1969b) 计算了球对称介质中点源激发的各个模式振型. Takeuchi 和 Saito (1972) 推导了简正振型的方程. Tanimoto (1984) 得到了用振型叠加计算长周期合成地震图的公式. Woodhouse (1988) 提出了一种计算径向特征函数的数值方法, 这使得使用振型叠加计算合成地震图成为可能. Dahlen 和 Tromp (1998) 整合了前人的工作, 构建了一个全球地震学理论框架, 包括简正振型理论、简正振型叠加方法等相关方法.

所谓简正振型叠加法, 就是将地球自由振荡的各个振型按一定系数叠加在一起, 构成位移场 (栾威等, 2021). 地球存在两种自由振荡模式: 球形振荡和环形振荡, 分别对应于 P-SV 波系和 SH 波系. 简正振型提供了一组完备的、线性无关的波动方程通解, 因此任何特定的解, 即由给定源激发的位移场, 都可以通过简正波特征函数的线性叠加得到. 在球坐标系中, 震源和台站坐标分别由  $(r_S, \theta_S, \phi_S)$  和  $(r_R, \theta_R, \phi_R)$  给出, 其中  $r_R$  通常是地球的半径. 对于  $r_S$  处的脉冲点源的地震, 它可由力矩张量  $\mathbf{M}$  表示, 因此接收器  $r_R$  处每个振型的位移场是力矩张量与震源处模态应变  $\boldsymbol{\varepsilon}_j$  的张量积和台站处模态位移  $\mathbf{s}_j$  的复共轭所给出的模态激励的乘积:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}_R, t; \mathbf{r}_S) &= \text{Re} \left[ \sum_{j=k,l,m,n} v_j^{-2} [\mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_j^*(\mathbf{r}_S)] \mathbf{s}_j(\mathbf{r}_R) [1 - \exp(iv_j t)] \right] \end{aligned} \quad (23)$$

式中, 模态应变为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{s}_j + (\nabla \mathbf{s}_j)^T] \quad (24)$$



式中，上标 T 表示矩阵转置。

对于具有滞弹性衰减的真实地球模型，简正振型的本征频率  $v_j$  是复数，实部和虚部  $\omega_j$  和  $\sigma_j$  分别表征振型的时间振荡模式和衰减。因此：

$$v_j = \omega_j + i\sigma_j, \sigma_j = \frac{1}{2}\omega_j Q_j^{-1} \quad (25)$$

式中， $Q_j$  是相应的模态品质因数。

根据 Rayleigh 原理，弹性/滞弹性的微小扰动对简正振型特征函数的影响相比其对特征频率的影响是二阶的，因此可以忽略。所以若考虑滞弹性，由于忽略了特征函数的影响，在引入与频率相关的体积模量和剪切模量时，会导致所谓的物理频散 (Dahlen and Tromp, 1998)。此外，假设地球略有滞弹性，也就是说， $\sigma_j \ll \omega_j$ ，方程 (23) 变为：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}_R, t; \mathbf{r}_S) &= \sum_{j=k,l,m,n} [\mathbf{M} : \mathbf{s}_j^*(\mathbf{r}_S)] \mathbf{s}_j(\mathbf{r}_R) \frac{1 - \exp(-\sigma_j t) \cos \omega_j t}{\omega_j^2} \end{aligned} \quad (26)$$

这是用简正振型叠加表示位移的常见形式。

简正振型方法仍然在全球和区域尺度的面波层析成像中广泛使用 (Chevrot and Zhao, 2007; Ritsema et al., 2011)，主要优点是以很小的计算成本提供精确的合成地震图，并能包括滞弹性、地球自转和重力的影响；主要缺点是在 8 s 以下的周期内计算球形振荡很困难 (Al-Attar and Woodhouse, 2008)，并且要求简正振型求和的振型数随着频率的增加而急剧增加。因此，简正振型叠加方法非常适合于计算长周期的地震记录，不适合模拟短周期远震体波。

### 1.2 半解析法

对于横向均匀的一维地球模型，可以通过半解析法将波动方程分解为水平和垂直分量，水平分量是偏微分方程，其解析解为平面分层模型的矢面调和或球对称模型的矢面球谐。垂直分量为常微分方程组 (ODE) 的数值解，通过求解该常微分方程，从而达到精度和效率的折衷 (Zhang et al., 2003; Yang et al., 2010)。

目前已发展出各种方法来求解常微分方程组，例如，离散波数法 (DWN)、WKM 法、频率波数域法 (FK) 等。其中 WKM 法是 WKBJ 方法的改良版。这些方法给出了球对称地球模型波动方程的精确解，即忽略了地球结构的横向变化，却充分而

精确地考虑了地球球状的曲率效应和有限频率地震波的散射、波前愈合及射线路径在低速区发散、在高速区聚集而引起射线分布非均匀等复杂的波现象问题 (Dahlen and Tromp, 1998)。

#### (1) 离散波数法 (DWN)

离散波数法由 Bouchon 和 Aki (1977) 提出，由于其能够精确地求解出完备的格林函数，在许多弹性动力学计算问题中得到了广泛的应用 (Bouchon and Aki, 1977; Bouchon, 1979, 1981, 2003; Chen, 1990; Chen and Zhang, 2001; Fu and Bouchon, 2004; Zhou and Chen, 2006, 2008; Wu et al., 2020)。该方法的基本思想是将震源表示为以离散角度传播的均匀和非均匀平面波的叠加 (Bouchon and Aki, 1977)。离散波数法的原理可以追溯到 Rayleigh，他证明了由正弦波纹界面反射的波只能以离散的角度传播，被称为频谱阶数 (Rayleigh and Baron, 1896; Rayleigh, 1907)。水平波数谱中离散阶的存在直接导致了反射界面的周期性。Aki 和 Lerner (1970) 利用复频率扩展了 Rayleigh 方法来研究周期性不规则表面附近的平面波散射。同样，离散波数方法引入震源的空间周期性来离散辐射波场，并依靠复频域中的傅里叶变换来计算格林函数。

离散波数法的基本原理如下：无限均匀介质中线源的稳态辐射可以表示为柱面波，或者等价地表示为均匀和非均匀平面波的连续叠加。因此，用  $x$  和  $z$  表示垂直于线源的平面中的水平轴和垂直轴，任何可观测数据 (如位移或应力) 都可以写成以下形式 (Bouchon, 2003)：

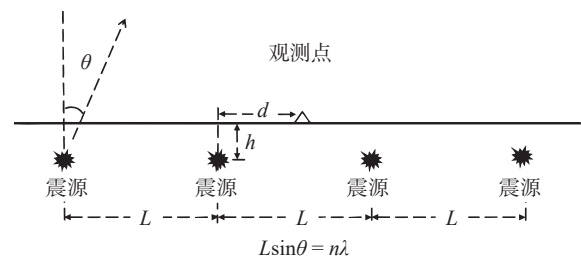


图 2 DWN 方法的物理解释。将单个源替换为以相等间隔  $L$  水平分布的无限多个源阵列。对于与特定激励频率相对应的给定辐射波长  $\lambda$ ，弹性能量仅在离散方向  $\theta$  上辐射 (修改自 Bouchon, 2003)。

Fig. 2 Physical interpretation of the DWN method. The single source is replaced by an infinite array of sources distributed horizontally at equal interval  $L$ . For a given radiation wavelength  $k$  corresponding to a specific frequency of excitation, the elastic energy is radiated in discrete directions  $\theta$  only (modified from Bouchon, 2003)

$$F(x, z; \omega) = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(k, z) e^{-ikx} dk \quad (27)$$

当介质有限或垂直非均匀时, 积分核具有极点和奇点, 水平波数上的积分在数学上和数值上都变得复杂起来. 绕过这些困难的一种简单方法是将其解由公式 (27) 表示的单源问题替换为震源沿  $x$  轴周期性分布的多源问题 (图 2). 然后, 公式 (27) 被替换为:

$$G(x, z; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k, z) e^{-ikx} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ikmL} dk \quad (28)$$

式中,  $L$  是震源的周期性震源间距, 方程 (28) 简化为:

$$G(x, z; \omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_n, z) e^{-ik_n x} \quad (29)$$

式中,  $k_n = \frac{2\pi}{L} n$ , 如果级数收敛, 可用有限求和方程来近似:

$$G(x, z; \omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-N}^N f(k_n, z) e^{-ik_n x} \quad (30)$$

通过上面的假设和变换, 计算量大幅减小. 已经将单源问题变成了含有周期性震源分布的多源问题 (图 2). DWN 方法计算方程 (30), 也就是  $G(x, z; \omega)$ .

第二步, 要从频域中求解的多源问题中提取单源解. 可以通过在复频域中进行傅里叶变换来实现:

$$g(x, z; t) = \int_{-\infty+i\omega_I}^{\infty+i\omega_I} G(x, z; \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (31)$$

式中,  $\omega_I$  表示频率的常量虚部, 并且:

$$e^{\omega_I T} \ll 1 \quad (32)$$

方程 (32) 确保了先前无限时间响应解在时间窗口  $T$  上的衰减. 因此, 假设选择了足够大的  $L$ , 使得最接近的震源到达接收点  $(x, z)$  处的波形在感兴趣时间窗口  $T$  中不受干扰, 则可以从多源频率域解计算  $G(x, z; \omega)$  得到时域单源解  $f(x, z; t)$ :

$$f(x, z; t) = e^{-\omega_I t} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, z; \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (33)$$

## (2) WKM 法

为了得到更高精度的波形来反映地幔深部结构的非均匀性, Ni 等 (2000) 发展了一种新方法, 该方法能直接从块状的层析模型中计算二维合成地震图. 该方法是 WKBJ 方法的改进版, 因此叫做 WKM 方法. 它跟 WKBJ 近似不同, WKBJ 近似是用几何射线路径计算台站的波形, 而 WKM 近似是

用连接源和台站的多条广义射线路径计算台站的波形. WKM 利用一维层状参考模型的射线路径定位每个射线段, 通过不断调整  $p_i(t_i)$  ( $p_i$  为射线参数,  $t_i$  为走时) 以满足 Snell 定律及其数值导数  $(\partial p / \partial t)$ . Ni 等 (2000) 基于 Grand 的层析成像模型 (Grand et al., 1994) 生成了中美洲下方高速  $D''$  区域的 WKM 合成地震图. Ni 等 (2003) 基于与南非热柱相关的 S 速度异常的二维模型 (图 3), 分别用 WKM 与伪谱法合成地震图, 并进行比较 (图 4). 结果显示, 两种方法合成的 SV 波场和 SH 波场基本吻合 (Ni et al., 2003).

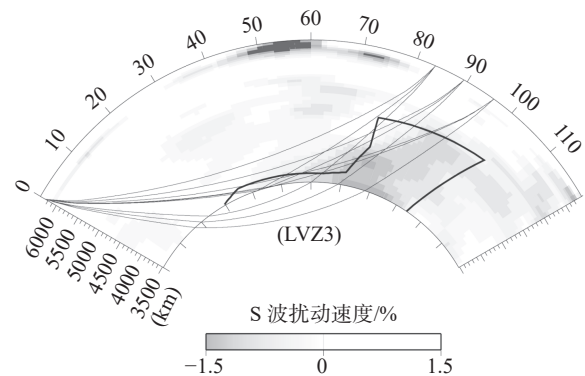


图 3 层析成像获得的从南美到南非的二维速度剖面 (修改自 Ritsema et al., 1999; Ni et al., 2003)

Fig. 3 2D velocity section from South America to South Africa obtained from tomography (modified from Ritsema et al., 1999; Ni et al., 2003)

WKM 近似对于合成二维理论地震图非常有效. 但是 WKM 不能应用于地球内部存在尖锐变化的速度结构, 这是因为尖锐介质处速度差异很大, 这样产生的衍射作用很强, 而 WKM 近似不能有效考虑这种衍射作用 (Ni et al., 2000).

## (3) 频率波数域法 (FK)

频率波数域法 (FK) 是计算远震波场最重要的方法之一 (Thomson, 1950; Haskell, 1953, 1964; Takeuchi and Saito, 1972; Schmidt and Tango, 1986; Zhu and Rivera, 2002), 该方法在频率和波数域采用传播矩阵计算地震的位移场分布. 由于该方法理论清晰, 计算准确, 因此在计算分层模型的理论合成地震图时, 应用非常广泛 (Tong et al., 2014a).

已知在各向同性介质中, 频率域的弹性波方程可以写成:

$$-\rho\omega^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \quad (34)$$

式中,  $\mathbf{u}$  代表位移矢量,  $\rho$ ,  $\lambda$  及  $\mu$  表示介质中密度和拉梅参数的空间分布. 在水平层状介质中, 位移

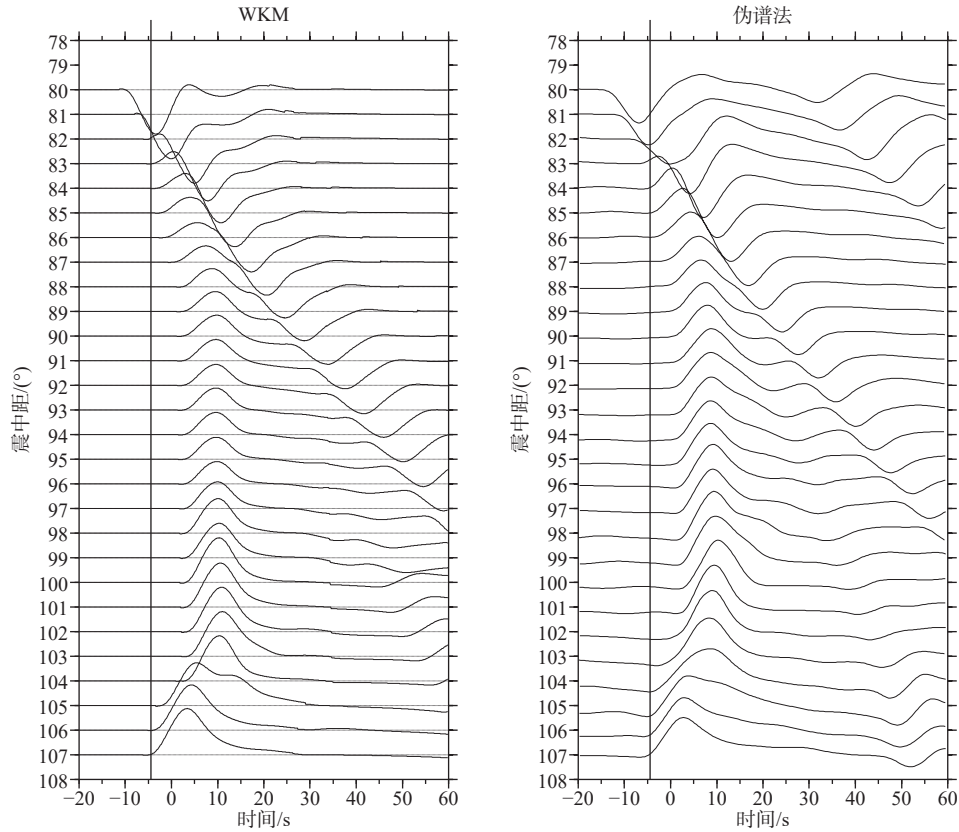


图4 WKM法(左)和伪谱法(右)生成的SV波合成地震图对比(修改自Ni et al., 2003)

Fig. 4 Comparison of SV synthetics generated by the WKM method against the pseudo-spectral method (on the right) (modified from Ni et al., 2003)

场  $\mathbf{u}$  仅依赖于水平和垂直坐标, 即  $u = u(x, z, \omega)$ . 对  $\mathbf{u}$  做傅里叶变换, 将空间域  $x$  变换为水平波数域  $k$ , 将时间域  $t$  变换为频率域  $\omega$ , 可得:

$$\mathbf{u} = [-iy_1(z, k; \omega), y_2(z, k; \omega), y_3(z, k; \omega)] \quad (35)$$

于是方程 (34) 可以简化成两组一阶常微分方程 (Takeuchi and Saito, 1972; Zhu and Rivera, 2002; Liu et al., 2017a). 通过计算特征值和特征向量, 得到两个常微分方程组的通解:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\frac{v_S}{k} & i\frac{v_S}{k} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -i\frac{v_P}{k} & i\frac{v_P}{k} \\ 2k\mu\gamma_1 & 2k\mu\gamma_1 & -2i\mu v_P & 2i\mu v_P \\ -2i\mu v_S & 2i\mu v_S & 2k\mu\gamma_1 & 2k\mu\gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (36)$$

及

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -i\mu v_S & -i\mu v_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-iv_S z} & 0 \\ 0 & e^{iv_S z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_5 \end{bmatrix} \quad (37)$$

式中,  $C_1$ 、 $C_3$ 、 $C_4$ 及 $C_6$ 分别对应上行SV波、下行SV波、上行P波和下行P波的振幅; 而 $C_2$ 、 $C_5$ 对应的是上行SH波、下行SH波的振幅.  $p = \frac{k}{\omega}$ 为射线参数,  $\alpha$ 、 $\beta$ 分别表示该层介质中P波和S波的波速, 则:

$$v_P = \omega \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - p^2}, v_S = \omega \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - p^2}, \gamma_1 = 1 - \frac{1}{2p^2\beta^2} \quad (38)$$

$v_P$ 和 $v_S$ 分别为P波和S波的垂直波数,  $\gamma_1$ 为辅助

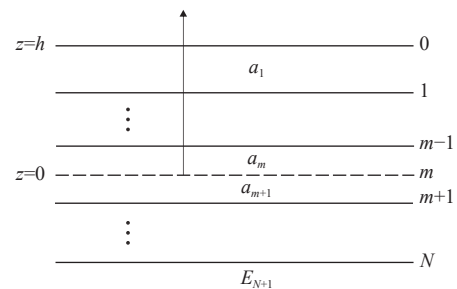


图5 底部半空间上的N层组成的分层半空间

Fig. 5 A layered half-space consists of N layers over a half-space at the bottom.



变量.

当平面波入射  $N$  层层状半空间介质时 (图 5), 对于第  $m$  层, 上层  $z = z_m$  与下层  $z = z_{m-1}$  的变量  $y$  可通过传播矩阵  $\mathbf{P}_m$  联系起来, 即:

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{P}_m \mathbf{y}_{m-1} \quad (39)$$

对于 P 波平面波入射情况, 我们将底层设为  $z = 0$ , 并假设从底部第 1 层到顶部第  $n$  层的传播矩阵分别为  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ . 由方程 (36), 可得到在  $z = 0$  处的波场:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_6 \end{bmatrix}_{z=0} = \begin{bmatrix} -i\frac{v_S}{k} & i\frac{v_S}{k} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -i\frac{v_P}{k} & i\frac{v_P}{k} \\ 2k\mu\gamma_1 & 2k\mu\gamma_1 & -2i\mu\nu_P & 2i\mu\nu_P \\ -2i\mu\nu_S & 2i\mu\nu_S & 2k\mu\gamma_1 & 2k\mu\gamma_1 \end{bmatrix}_0 \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_6 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_0(\mu, \xi; \omega, p) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (40)$$

地表为:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_6 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_n \cdots \mathbf{P}_1 \mathbf{E}_0 \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_6 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (41)$$

式中:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_{ij}]_{4 \times 4} = \mathbf{P}_n \cdots \mathbf{P}_1 \mathbf{E}_0 \quad (42)$$

上式中  $\mathbf{E}_0$  是由半空间 ( $z = 0$ ) 模型参数计算得到的矩阵. 而  $\mathbf{P}_i$  中的下角标  $i$  表示在第  $i$  层介质中的传输矩阵.

### 1.3 数值解法

#### (1) 直接法 (DSM)

直接法是一种 Galerkin 方法, 它在频率域求解波动方程的弱形式 (Cummins et al., 1994; Geller and Ohminato, 1994; Geller and Takeuchi, 1995; Takeuchi et al., 1996). 之所以称为直接解法, 是因为该解是通过直接求解线性方程组得到的, 而非首先计算自由振荡模式, 然后通过模态叠加计算合成地震图 (Geller and Ohminato, 1994).

具有自由表面边界条件介质的 DSM 运动方程为 (Takeuchi and Saito, 1972; Kawai et al., 2006):

$$(\omega^2 \mathbf{M} - \mathbf{K} + \mathbf{D}) \mathbf{c} = -\mathbf{f} \quad (43)$$

式中,  $\omega$  是频率,  $\mathbf{M}$  是质量 (动能) 矩阵,  $\mathbf{K}$  是刚度 (势能) 矩阵,  $\mathbf{D}$  是对应于自由边界条件的矩阵

算子.  $\mathbf{c}$  是测试函数的展开系数向量,  $\mathbf{f}$  是力矢量. 矩阵和向量元素的显式形式为:

$$M_{mn} = \int_V (\phi_i^{(m)})^* \rho \phi_i^{(n)} dV \quad (44)$$

$$K_{mn} = \int_V (\phi_{i,j}^{(m)})^* C_{ijkl} \phi_{k,l}^{(n)} dV \quad (45)$$

$$D_{mn} = \int_S (\phi_i^{(m)})^* S_{ij} \phi_j^{(n)} dS \quad (46)$$

$$f_m = \int_V (\phi_i^{(m)})^* f_i dV \quad (47)$$

位移矢量由  $N$  个测试向量测试函数  $\phi_i(n)$  的线性组合给出:

$$u_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_i(n)(\mathbf{r}) \quad (48)$$

用线性插值函数  $X_k(r)$  来描述位移的垂直变化:

$$X_k(r) = \begin{cases} (r - r_{k-1}) / (r_k - r_{k-1}), & r_{k-1} < r \leq r_k \\ (r_{k+1} - r) / (r_{k+1} - r_k), & r_k \leq r < r_{k+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (49)$$

用复矢量球谐  $\mathbf{S}_{lm}^1$ 、 $\mathbf{S}_{lm}^2$ 、 $\mathbf{T}_{lm}$  来描述位移的横向变化:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{lm}^1(\theta, \phi) &= (Y_{lm}(\theta, \phi), 0, 0) \\ \mathbf{S}_{lm}^2(\theta, \phi) &= \left( 0, \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta}, \frac{1}{\mathcal{L} \sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \phi} \right) \\ \mathbf{T}_{lm}(\theta, \phi) &= \left( 0, \frac{1}{\mathcal{L} \sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \phi}, -\frac{1}{\mathcal{L}} \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

式中,  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  是完全归一化的球谐函数.

在矢量球谐基函数中, 位移矢量由下式给出:

$$\mathbf{u}(r, \theta, \phi) = \sum_{lm} U_{lm}(r) \mathbf{S}_{lm}^1 + V_{lm}(r) \mathbf{S}_{lm}^2 + W_{lm}(r) \mathbf{T}_{lm} \quad (51)$$

式中, 径向函数与径向测试函数的关系:

$$U_{lm}(r) = \sum_k c_{lmk}^1 X_k(r) \quad (52)$$

$$V_{lm}(r) = \sum_k c_{lmk}^2 X_k(r) \quad (53)$$

$$W_{lm}(r) = \sum_k c_{lmk}^3 X_k(r) \quad (54)$$

获得位移后, 可以计算位移相对于  $r$ 、 $\theta$  和  $\phi$  的偏导数. 测试函数  $\mathbf{S}_{lm}^1$ 、 $\mathbf{S}_{lm}^2$ 、 $\mathbf{T}_{lm}$  关于  $\phi$  和  $\theta$  的导数可以得到解析表达式:

$$\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} = im Y_{lm} \quad (55)$$

$$\frac{dP_{lm}}{d\theta} = m \frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_{lm} - P_{lm-1} \quad (56)$$

在 DSM 中, 位移在频域通过一系列基函数展开, 这些基函数由垂直方向的低阶多项式和角方向的球谐函数的乘积构成. 然后用伽辽金法

求解这些基函数的系数. 由于在垂直方向上进行离散化处理, 点源通常不会位于垂直节点之间. 在这些情况下, Takeuchi 和 Geller (2003) 提出的震源表示方法可用于合成计算, 其精度与震源位于节点处的解相同. 通过调整垂直网格间距、最大角度阶数和截止深度, 即使在频率高达 2 Hz 的情况下, DSM 可以非常有效并准确地计算理论地震图 (Kawai et al., 2006). 因此, 该方法特别适用于短周期远震波场数值模拟.

(2) AxiSEM

轴对称谱元法 (Axisymmetric Spectral Element

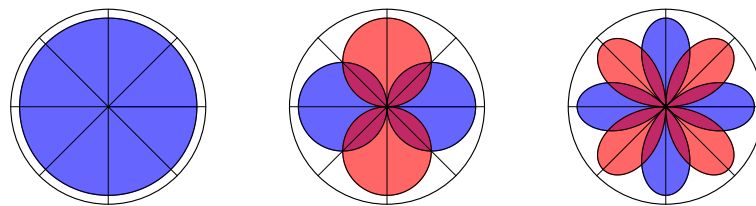


图 6 震源分解图样 (从左到右为单极源、偶极源、四极源) (修改自 Nissen-Meyer et al., 2014)

Fig. 6 Radiation patterns for monopole, dipole, and quadrupole from left to right (modified from Nissen-Meyer et al., 2014)

到接收器, 为正向波场) 以及地震台站的三分量点源  $\vec{p}$  (其响应为从接收器到震源, 为反向波场) 的全波场响应按照单极源、偶极源、四极源模式分解为独立的二维问题 (图 6), 从而实现三维问题到二维问题的降维处理. 作为全球地球模型地震图计算方法的一种, 轴对称谱元法能够准确地计算介质的质点速度以及应变响应, 兼顾了四边形网格谱元法的计算精度, 能够实现全球范围内的高频地震波数值模拟.

为了描述矩张量源的辐射方向图, 需要进行多个二维模拟通过线性组合以重建完整的三维波场. 根据矩张量震源产生的地震波场方位依赖性, 可以将其表示为具有单极 ( $m=0$ )、偶极 ( $m=1$ ) 和四极 ( $m=2$ ) 源项的有限个多极展开. 然后, 与给定极阶数  $m$  相关的波场可以用柱坐标表示为:

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_s(\bar{\mathbf{x}}) \cos m\Phi \\ u_\phi(\bar{\mathbf{x}}) \sin m\Phi \\ u_z(\bar{\mathbf{x}}) \cos m\Phi \end{pmatrix} \quad (57)$$

式中,  $\mathbf{x} = (s, \Phi, z)$  分别是沿径向轴、方位向轴和对称轴的坐标,  $\bar{\mathbf{x}} = (s, z)$  与前者相同, 用于二维 AxiSEM 计算区域.

地震矩张量的全响应最终表示为对应于四个基本震源 (两个单极、一个偶极和一个四极) 的格林函数的线性组合:

Method, AxiSEM) 最初由 Nissen-Meyer 于 2007 年提出 (Nissen-Meyer et al., 2007a, 2007b), 是基于球对称的一维地球模型 (例如 PREM、IASP91) 解决三维全球声波和弹性波传播的并行谱元方法, 该方法的创新之处在于考虑了球面地球模型的轴对称性, 使地震速度和地球密度随地球极轴的旋转而保持不变 (Monteiller et al., 2020). 通过考虑对称性, 首先对二维大尺度背景下的半圆区域进行常规谱元法数值模拟, 然后经过方位角旋转实现降维处理, 获取第三个维度任意方位角台站处的波场信息. 通过将震源矩张量  $\mathbf{M}$  的 6 个分量 (其响应从震源出发

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^4 \tilde{M}_k(\Phi) \tilde{\mathbf{G}}_k(\bar{\mathbf{x}}, t; z_s) S(t) \quad (58)$$

式中,  $S(t)$  为震源时间函数,  $\tilde{M}_k$  是基本源项的辐射方向图,  $\tilde{\mathbf{G}}_k$  是与基本源  $k$  对应的二维格林函数 (位于深度为  $z_s$  的对称轴上). 这四个辐射方向图本身是矩张量解的分量的线性组合:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1(\Phi) &= M_{rr} \\ \tilde{M}_2(\Phi) &= (M_{\theta\theta} + M_{\phi\phi})/2 \\ \tilde{M}_3(\Phi) &= M_{r\theta} \cos \Phi + M_{r\phi} \sin \Phi \\ \tilde{M}_4(\Phi) &= (M_{\theta\theta} - M_{\phi\phi}) \cos 2\Phi + M_{\phi\theta} \sin 2\Phi \end{aligned} \quad (59)$$

式中,  $\tilde{M}_1$  和  $\tilde{M}_2$  是两个单极源,  $\tilde{M}_3$  是偶极源,  $\tilde{M}_4$  是四极源.

一旦计算得到 4 个基本波场, 便可以通过方程 (59) 重建地震波场, 将其投影到球面坐标系. 最后, 将震源绕对称轴旋转, 可以得到在地理参考系中任意位置的波场.

## 2 混合法波场数值模拟

尽管基于一维地球模型的合成地震图快速算法具有计算频率高、运行速度快的优点, 但难以处理具有横向非均匀的三维区域模型. 而具有高精度的三维数值方法由于受到硬件计算能力和存储能力的限制, 目前仍然无法高效地模拟高频全球尺度的地震波场 (例如全球尺度周期为 1~2 s 的 P 波, 周期 3~6 s 的 S 波) (Liu and Gu 2012; Monteiller et

al., 2013). 这也限制了利用高频地震资料进行区域乃至全球尺度的高分辨率成像研究. 为了降低远震波正演模拟的计算成本, 很多学者已经开发出注入方法来计算区域三维模型中的理论地震图 (Bielak and Christiano, 1984; Roecker et al., 2010; Monteiller et al., 2013; Tong et al., 2014a, 2014b; Masson and Romanowicz, 2017a, 2017b; Beller et al., 2018a; Lin et al., 2019). 在勘探地震学 (Robertsson and Chapman, 2000; Ivo et al., 2002; Van Manen et al., 2007) 和电磁波传播 (Taflove and Hagness, 2005) 等领域也有类似的技术. 该方法的关键思想是, 目标区域通常远离震源区域 (也就是远震震源的情况下), 因此, 波场传播问题通常简化考虑为两部分: 全球尺度地震波传播和区域尺度地震波传播问题. 对于全球范围内的地震波场计算, 可以采用前面介绍的基于一维地球模型合成地震图的快速算法. 较为耗时的三维非均匀区域的地震波场计算被限制在较小的区域范围内, 并且可以使用合理的计算资源来有效地计算短周期的三维波场. 一般采用三维数值方法来计算目标区域, 如有限差分法 (FD) (Alterman and Karal, 1968) 和谱元法 (SEM) (Komatitsch and Tromp, 1999; Liu et al., 2017b) 等, 能够处理影响地震波传播的多种复杂因素, 例如自由表面和内部不连续性的界面起伏, 各向同性和各向异性的非均匀介质以及衰减问题等.

### 2.1 基于有限差分 (FD) 的混合方法

早在 20 世纪 80 年代, 学者们就提出了利用有限差分法与其他各种方法结合的地震波场数值模拟方法. Shtivelman (1984) 利用有限差分技术实现声波在结构非均匀部分的传播. 用改进的射线法计算均匀介质中的背景波场 (Shtivelman, 1984, 1985), 以及将有限差分法和边界积分法相结合 (Kummer et al., 1987; Stead and Helmberger, 1988). 温联星和姚振兴 (1994) 提出广义射线法和有限差分理论相结合的混合方法, 很好地应用了有限差分方法和广义射线法的优点, 既能计算非均匀区域的地震波传播, 也提高了计算效率. 但基于有限差分法的混合法也存在缺点, 如由于有限差分离散带来的严重数值频散经过一段传播距离之后会使波形发生畸变, 且难以考虑地球曲率问题, 因此它不适合计算大震中距的地震波场 (温联星和姚振兴, 1994). Wen 和 Helmberger (1998a) 以及 Wen (2002) 提出了有效的 P-SV 和 SH 混合方法, 利用该方法解决地幔

边界附近的局部非均匀各向同性介质的波场传播问题. 该混合方法已被用于研究核幔边界附近的各向异性结构 (Wen and Helmberger, 1998a, 1998b; Wen and Niu, 2002; Wen, 2002) 以及岩石圈和上地幔结构 (Chen et al., 2005). Zhao 等 (2008) 提出了用 GRT-FD 混合法计算了二维各向异性非均匀介质的理论波形.

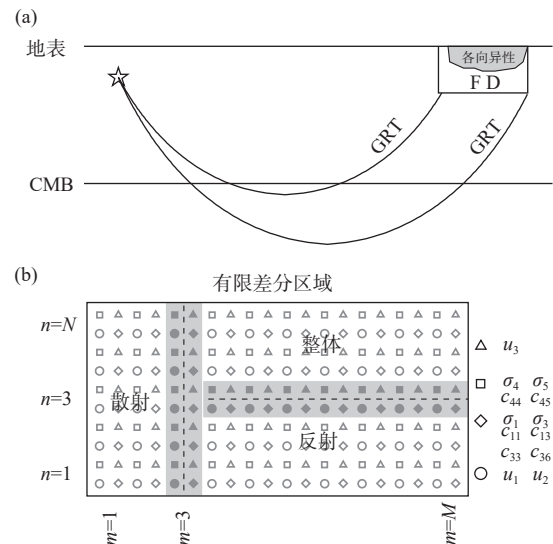


图 7 GRT-FD 混合方法原理示意图 (修改自 Zhao et al., 2008)

Fig. 7 Schematic diagram of the principle of hybrid method (modified from Zhao et al., 2008)

基于 FD-GRT 的混合远震波场数值模拟方法的概念如图 7a 所示 (Zhao et al., 2008). 计算包括广义射线理论 (GRT)、GRT-FD 界面耦合和 FD 计算三部分. 假设方形中的局部区域是横向变化的各向异性介质, 在局部区域采用 FD 算法. GRT (Helmberger, 1983) 用于计算从震源到 FD 区域底部的地震波的传播. 将 GRT 的解与 (图 7b) 中阴影区域的 FD 计算相结合. 在 FD 计算的顶部网格点上得到地球表面的合成地震图, 在这些计算中采用了地球展平近似 (Zhao et al., 2008).

### 2.2 基于谱元法 (SEM) 的混合方法

#### (1) DSM-SEM

Capdeville 等 (2003a) 提出耦合法, 通过区域分解, 沿耦合界面匹配位移和牵引力, 将谱元法与简正振型连接起来, 并将其扩展到“夹层”域 (sandwich domain) 的情况 (Capdeville et al., 2003a, 2003b). 但是, 该方法要求目标区域必须位于接收器所在的地球表面的正下方, 因此只能用于

台站阵列下方的精细结构正反演（如接收函数成像等）。

Monteiller 等（2013）结合直接解法（DSM）与谱元法（SEM）模拟远震波形数据，在全球一维球状分层地球模型下采用 DSM 方法进行全球高频理论地震图计算，存储目标区域边界处的波场；利用注入方法，在局部目标区域利用三维谱元法求解

该区域的非均匀介质波场传播；在区域分界面上采用吸收边界条件耦合两种正演方法，形成一个高效、高精度三维混合全波场计算方法。该混合方法将计算量较大的三维波场数值模拟限制在较小的局部目标区域内，极大降低了三维非均匀介质中地震波场正演计算的消耗，尤其适用于区域阵列成像应用，使得利用高频远震波形进行全波形反演成为可能。Monteiller 等（2015）随后用该混合方法实现了三维全波形反演，并展示了全波形反演较好的分辨率，即使仅在四个远震事件情况下，可以对具有尖锐莫霍面的简单地壳模型进行良好成像（图 8，9）。

Masson 等（2014）综述了基于注入技术混合法的理论，并将其命名为“箱式”技术，随后 Masson 和 Romanowicz（2017a, 2017b）将混合法应用到波形反演中并将其称为箱式层析成像（box tomography），实现了深部地球成像问题。Wu 等（2018）将谱元法模拟限制在一个较小的震源侧区域，有效地利用 DSM-SEM 混合方法计算具有 3-D 震源侧结构的远震波。Wang 等（2016）利用 29 个台站记录到的 5 个远震波形记录，基于混合法开展了远震 P 波波形反演研究，得到比利牛斯山西部下方的 P 波和 S 波速度模型，结果显示波形反演成像得到的速度结构与接收函数偏移图像之间具有很好的 consistency。

这些工作对远震体波全波形反演（FWI）的发展具有重要意义，但是 DSM 涉及存储和处理大量的球谐系数，这可能会造成严重的 I/O 瓶颈问题。对于浅源来说这个问题尤为严重，因为浅源地震的 DSM 模拟计算需要非常大的角阶数（angular orders）（Monteiller et al., 2020）。

### (2) SEM-FK

Tong 等（2014a）提出了三维 SEM-FK 混合方法，将远震入射波看成平面波，利用计算消耗更小的 FK 算子作为谱元法的边界输入，并通过理论合成数据验证了方法的可靠性。通过在区域场外使用 FK 算子计算一维介质的平面波响应，在区域场内使用谱元法模拟远震体波在三维复杂介质中的传播，在保持高计算效率的同时还能精确地模拟到线性台站下方非均匀结构体对远震体波的影响，同时混合法能产生和莫霍面相关的各种震相（及尾波），对速度间断面也有很好的约束（图 10）。然而，FK 方法忽略了波前和地球的曲率，并且无绝对到时等，在接收函数正演模拟方面将有一定的应用前景，但是在远震波形层析成像研究中将存在一定的

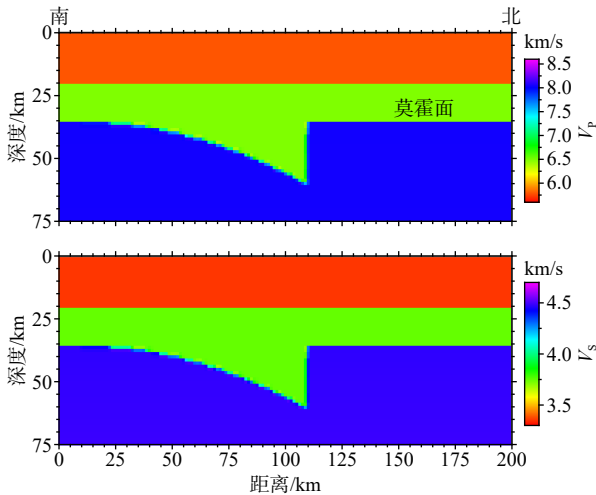


图 8 用于全波形反演的 P（上）和 S（下）波速度模型（修改自 Monteiller et al., 2015）

Fig. 8 Synthetic model of P (top) and S (bottom) velocities for full waveform inversion (modified from Monteiller et al., 2015)

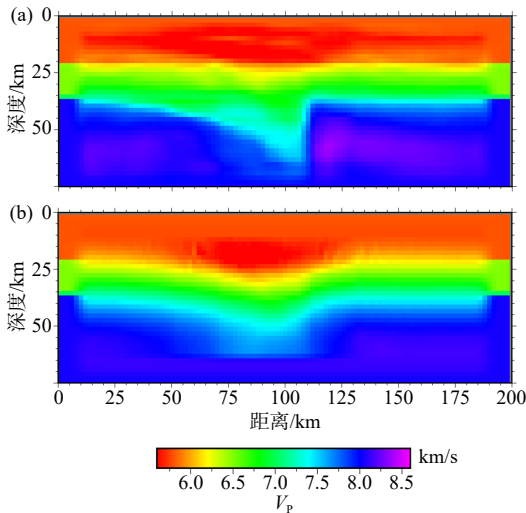


图 9 由垂直分量直达 P 波的 (a) 全波形反演和 (b) 伴随层析成像得到的模型，在伴随层析成像情况下 L-BFGS 迭代 15 次，在全波形反演情况下迭代 5 次（修改自 Monteiller et al., 2015）

Fig. 9 Models obtained by (a) full waveform inversion and (b) adjoint tomography from vertical-component direct P waves, after 15 iterations of the L-BFGS in the case of adjoint tomography and 5 iterations in the case of full waveform inversion (modified from Monteiller et al., 2015)



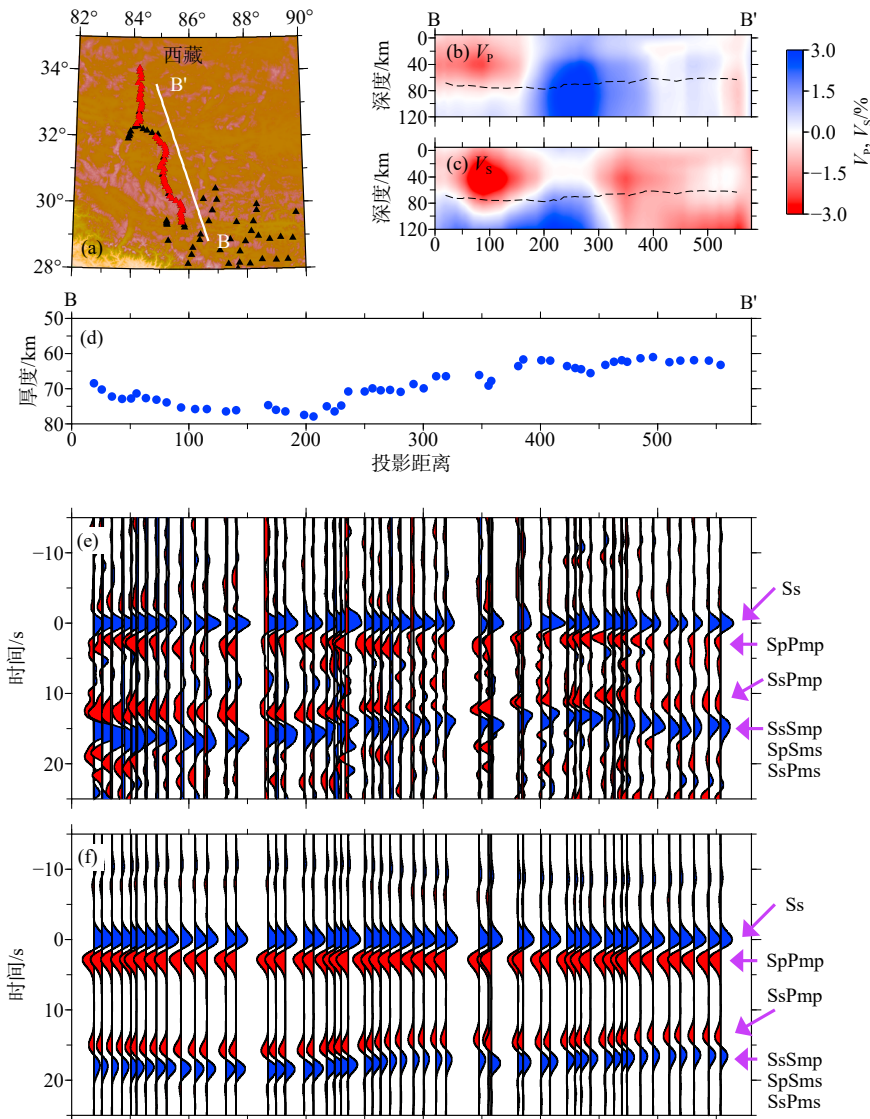


图 10 (a) 在西藏中部部署的 Hi-CLIMB 台站 (三角形) 的地理分布. 红色三角形表示用于观测和合成 RF 剖面的台站. BB' 是 Tseng 等 (2009) 估算地壳厚度的剖面. (b) Hung 等 (2011) 绘制的沿剖面 BB' 的  $V_p$  和 (c)  $V_s$  扰动. (d) Tseng 等 (2009) 根据  $T_{SsPmp} - T_{Ss}$  估计的地壳厚度 (蓝点). (e) 2005 年发生在北纬 5.32°、东经 123.34°、深度 522 km 的地震的 SV 波地震反射剖面 (垂直分量速度). 各种散射/转换的相位, 用紫色箭头表示. (f) 基于局部地壳模型的三维 SEM-FK 混合方法计算相应的 SV 波合成地震剖面, 该模型综合了 CRUST1.0、估计的莫霍剖面、三维  $V_p$  和  $V_s$  变化. 图 4e 和图 4f 中的所有地震记录都在 Ss 震相上对齐 (修改自 Tong et al., 2014b)

Fig. 10 (a) Geographic distributions of Hi-CLIMB stations (triangles) previously deployed in central Tibet. Red triangles indicate stations used to generate the observed and synthetic RF profiles. BB' is the profile along which the crust thickness was estimated by Tseng et al. (2009). (b)  $V_p$  and (c)  $V_s$  perturbations along Profile BB' mapped by Hung et al. (2011) superimposed onto the estimated Moho. (d) Estimated crust thickness (blue dots) based on  $T_{SsPmp} - T_{Ss}$  by Tseng et al. (2009). (e) Observed SV wave seismic reflection profile (vertical-component velocity) for a 2005 earthquake occurred at 5.32° N, 123.34° E, and a depth of 522 km. Various scattered/converted phases, including SsPmp, are indicated by purple arrows. (f) Corresponding synthetic SV wave seismic profile computed by the 3-D SEM-FK hybrid method based on a local crustal model that incorporates CRUST1.0, the estimated Moho profile, and the 3-D  $V_p$  and  $V_s$  variations. All seismograms in Figures 4e and 4f are aligned on the Ss phase (modified from Tong et al., 2014b)

困难和不足.

### (3) AxiSEM-SEM

除了 DSM-SEM 和 FK-SEM, AxiSEM-SEM 同样被证明是一种有效的模拟远震波场的混合数值模拟方法 (Beller et al., 2018a, 2018b; Lin et al., 2019; Monteiller et al., 2020). 该方法利用 AxiSEM

计算地震波在一维地球模型中传播的入射波场 (Nissen-Meyer et al., 2014), 用三维谱元法模拟地震波在岩石圈目标区域的传播. Beller 等 (2018b) 使用该方法研究了西南阿尔卑斯山脉的岩石圈结构, 通过对 CIF ALPS 实验记录的 9 个远震事件进行 3-D 各向同性全波形反演 (FWI), 给出了阿尔卑



斯山脉岩石圈的三维密度、P 波和 S 波速度模型。

由于 AxiSEM 通过模拟四个二维全矩张量源的波场合成任意台站处的位移波场 (Nissen-Meyer et al., 2007a, 2007b, 2008), 相比于 DSM 的三维计算, 大大提高了计算效率。相比于 FK 方法, 由于无平面波假设, AxiSEM 模拟出更加接近真实的地震波场。AxiSEM 方法的另一个优点是采用了与岩石圈目标区域中相同 GLL 节点的离散网格, 避免了任何边界插值引入的数值噪声 (Monteiller et al., 2020)。

### 3 总结和展望

本文系统总结了远震波场模拟的常用方法。传统的远震波场模拟方法主要基于一维地球模型假设, 根据其特点可以分为解析法、半解析法和数值法。解析法主要采用积分变换方法, 在高频条件下得到波传播问题的解析解。半解析法主要借助于数值方法求解波传播问题的积分方程。数值法则主要基于一维球对称模型, 对波动方程数值求解。这些方法具有各自的特点, 运算效率较高, 但无法模拟三维非均匀介质中地震波的传播。

随着软、硬件的快速发展, 以及越来越多的高质量宽频带和短周期数据, 人们对地下结构成像的精度要求也越来越高, 仅利用传统方法已无法满足这一要求。因此, 研究人员提出了将全球一维地球模型的快速算法和局部高精度、高效率三维波场数值方法相结合的混合方法, 实现了远震波场数值模拟的高效计算。根据两种算法的特点可以有多种结合, 得到不同的混合方法。其中, GRT-FD 混合法由于采用有限差分法来计算局部区域的三维非均匀地震波场, 因而难以适应剧烈的地表起伏并处理自由边界条件, 并且难以考虑地球的曲率变化因而难以适应区域尺度的地震波场高精度计算; FK-SEM 混合法由于采用 FK 方法计算全球一维地球模型中的地震波场, 无法考虑地球曲率且无绝对到时; DSM-SEM 和 AxiSEM-SEM 混合方法由于采用 SEM 实现局域区域的三维非均匀地震波场数值模拟, 通过设计自适应网格能够有效处理地表起伏并适应地球的曲率变化等, 两者作为更为精确的远震波场混合模拟方法, 有望在 3D 区域尺度波形反演、偏移成像中得到更广泛的应用。

致谢

感谢中国科学技术大学孙道远教授、美国密歇根州立大学 (Michigan State University) 陈敏 (Chen Min) 博士、南方科技大学张伟和叶玲玲教授有益的建议。感谢两位匿名审稿人的宝贵建议, 对稿件提升很有帮助。

### References

- Aki K, Larner K L. 1970. Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves[J]. *Journal of Geophysical Research*, 75(5): 933-954.
- Al-Attar D, Woodhouse J. 2008. Calculation of seismic displacement fields in self-gravitating earth models—applications of minors vectors and symplectic structure[J]. *Geophysical Journal International*, 175: 1176-1208.
- Alterman Z, Karal Jr F. 1968. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 58(1): 367-398.
- Baker B, Roecker S. 2014. A full waveform tomography algorithm for teleseismic body and surface waves in 2.5 dimensions[J]. *Geophysical Journal International*, 198(3): 1775-1794.
- Beller S, Monteiller V, Combe L, et al. 2018a. On the sensitivity of teleseismic full-waveform inversion to earth parametrization, initial model and acquisition design[J]. *Geophysical Journal International*, 212(2): 1344-1368.
- Beller S, Monteiller V, Operto S, et al. 2018b. Lithospheric architecture of the South-Western Alps revealed by multiparameter teleseismic full-waveform inversion[J]. *Geophysical Journal International*, 212(2): 1369-1388.
- Bielak J, Christiano P. 1984. On the effective seismic input for non-linear soil-structure interaction systems[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 12(1): 107-119.
- Bielak J, MacCamy R C, McGhee D S, et al. 1991. Unified symmetric BEM-FEM for site effects on ground motion—SH waves[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(10): 2265-2285.
- Bielak J, Loukakis K, Hisada Y, et al. 2003. Domain reduction method for three-dimensional earthquake modeling in localized regions, Part I: Theory[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 93(2): 817-824.
- Bouchon M, Aki K. 1977. Discrete wave-number representation of seismic-source wave fields[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 67(2): 259-277.
- Bouchon M. 1979. Discrete Wave number representation of elastic wave fields in 3-space dimensions[J]. *Journal of Geophysical Research*, 84(Nb7): 3609-3614.
- Bouchon M. 1981. A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 71(4): 959-971.
- Bouchon M. 2003. A review of the discrete wavenumber method[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 160(3-4): 445-465.
- Capdeville Y, Chaljub E, Vilotte J P, et al. 2003a. Coupling the spectral element method with a modal solution for elastic wave propagation in global earth models[J]. *Geophysical Journal International*, 152(1): 34-67.
- Capdeville Y, To A, Romanowicz B. 2003b. Coupling spectral ele-

- ments and modes in a spherical Earth: an extension to the 'sandwich' case[J]. *Geophysical Journal International*, 154(1): 44-57.
- Carcione J M, Kosloff D, Kosloff R. 1988. Wave-propagation simulation in a linear viscoacoustic medium[J]. *Geophysical Journal*, 93(2): 393-407.
- Chapman C H. 1976. Exact and approximate generalized ray theory in vertically inhomogeneous-media[J]. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 46(2): 201-233.
- Chapman C H. 1978. A new method for computing synthetic seismograms[J]. *Geophysical Journal International*, 54(3): 481-518.
- Chapman C H, Drummond R. 1982. Body-wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72(6B): S277-S317.
- Chapman C H, Orcutt J A. 1985. The computation of body wave synthetic Seismograms in laterally homogeneous media[J]. *Reviews of Geophysics*, 23(2): 105-163.
- Chen L, Wen L X, Zheng T Y. 2005. A wave equation migration method for receiver function imaging: 2. Application to the Japan subduction zone[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 110(B11): B11309.
- Chen X F. 1990. Seismogram synthesis for multi-layered media with irregular interfaces by global generalized reflection/transmission matrices method. I. Theory of two-dimensional SH case[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 80(6A): 1696-1724.
- Chen X F, Zhang H M. 2001. An efficient method for computing Green's functions for a layered half-space at large epicentral distances[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 91(4): 858-869.
- Chevrot S, Zhao L. 2007. Multiscale finite-frequency Rayleigh wave tomography of the Kaapvaal craton[J]. *Geophysical Journal International*, 169(1): 201-215.
- Clouzet P, Masson Y, Romanowicz B. 2018. Box tomography: First application to the imaging of upper-mantle shear velocity and radial anisotropy structure beneath the North American continent[J]. *Geophysical Journal International*, 213(3): 1849-1875.
- Cummins P R, Geller R J, Takeuchi N. 1994. Dsm complete synthetic seismograms-P-Sv, spherically symmetrical, case[J]. *Geophysical Research Letters*, 21(15): 1663-1666.
- Dahlen F, Tromp J. 1998. *Theoretical Global Seismology*[M]. New Jersey: Princeton University Press.
- Dey-Sarkar S, Chapman C. 1978. A simple method for computation of body-wave seismograms[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 68(6): 1577-1593.
- Dmitry B, Singh S C, Nobuaki F. 2015. An efficient method of 3-D elastic full waveform inversion using a finite-difference injection method for time-lapse imaging[J]. *Geophysical Journal International*, 202(3): 1908-1922.
- Fäh D, Suhadolc P, Panza G F. 1993. Variability of seismic ground motion in complex media: the case of a sedimentary basin in the Friuli (Italy) area[J]. *Journal of Applied Geophysics*, 30(1-2): 131-148.
- Fäh D, Suhadolc P, Mueller S, et al. 1994. A hybrid method for the estimation of ground motion in sedimentary basins: quantitative modeling for Mexico City[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 84(2): 383-399.
- Florsch N, Fäh D, Suhadolc P, et al. 1991. Complete synthetic seismograms for high-frequency multimode SH-waves[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 136(4): 529-560.
- Fu L-Y, Bouchon M. 2004. Discrete wavenumber solutions to numerical wave propagation in piecewise heterogeneous media-I. Theory of two-dimensional SH case[J]. *Geophysical Journal International*, 157(2): 481-498.
- Geller R J, Ohminato T. 1994. Computation of synthetic seismograms and their partial derivatives for heterogeneous media with arbitrary natural boundary-conditions using the direct solution method[J]. *Geophysical Journal International*, 116(2): 421-446.
- Geller R J, Takeuchi N. 1995. A new method for computing highly accurate Dsm synthetic seismograms[J]. *Geophysical Journal International*, 123(2): 449-470.
- Gilbert F. 1971. Excitation of the normal modes of the earth by earthquake sources[J]. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 22: 223-226.
- Grand S P. 1994. Mantle shear structure beneath the Americas and surrounding oceans[J]. *Journal of Geophysical Research Solid Earth*, 99: 11591-11622.
- Graves R W, Helmberger D V. 1988. Upper mantle cross section from Tonga to Newfoundland[J]. *Journal of Geophysical Research Atmospheres*, 93(B5): 4701-4711.
- Gualtieri L, Stutzmann E, Capdeville Y, et al. 2013. Modelling secondary microseismic noise by normal mode summation[J]. *Geophysical Journal International*, 193(3): 1732-1745.
- Haskell N A. 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 43(1): 17-34.
- Haskell N A. 1964. Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54(6A): 1811-1841.
- Helmberger D V. 1968. The crust-mantle transition in Bering Sea[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 58(1): 179-214.
- Helmberger D V. 1974. Generalized ray theory for shear dislocations[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 64(1): 45-64.
- Helmberger D V, Harkrider D G. 1978. Modeling earthquakes with generalized ray theory[J]. *Air Force Office of Scientific Research*, Bolling AFB, DC, 21: 174-222.
- Helmberger D V. 1983. Theory and application of synthetic seismograms[J]. *Earthquakes: Observation, Theory and Interpretation*, 85: 174-222.
- Hung S H, Chen W P, Chiao L Y. 2011. A data-adaptive, multiscale approach of finite-frequency, traveltimes tomography with special reference to P and S wave data from central Tibet[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 116(B6): B06307.
- Ivo O, Johana B, Donat F, et al. 2002. 3D hybrid Ray-FD and DWN-FD seismic modeling for simple models containing complex local structures[J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 46(4): 711-730.
- Kawai K, Takeuchi N, Geller R J. 2006. Complete synthetic seismograms up to 2 Hz for transversely isotropic spherically symmetric media[J]. *Geophysical Journal International*, 164(2): 411-424.
- Komatitsch D, Tromp J. 1999. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation[J]. *Geo-*

- physical Journal International, 139(3): 806-822.
- Komatitsch D, Liu Q Y, Tromp J, et al. 2004. Simulation of ground motion in the Los Angeles Basin base upon the Spectral-Element Method[J]. Bulletin of Seismological Society of America, 94(1): 187-206.
- Kummer B, Behle A, Dorau F. 1987. Hybrid modeling of elastic-wave propagation in two-dimensional laterally inhomogeneous media[J]. Geophysics, 52(6): 765-771.
- Li D Z, Helmberger D, Clayton R W, et al. 2014. Global synthetic seismograms using a 2-D finite-difference method[J]. Geophysical Journal International, 197(2): 1166-1183.
- Li X, Chen Y T. 1996. The generalized reflection-transmission coefficient matrix method for synthetic seismograms[J]. Seismological and Geomagnetic Observation and Research, 17(3): 1-20 (in Chinese).
- Li Y M, Sun Y Z, Yao Z X. 1980. A practical scheme on the computation of synthetic seismograms using "reflectivity method"[J]. Chinese Journal of Geophysics, 23(4): 389-395 (in Chinese).
- Lin C X, Monteiller V, Wang K, et al. 2019. High-frequency seismic wave modelling of the deep Earth based on hybrid methods and spectral-element simulations: a conceptual study[J]. Geophysical Journal International, 219(3): 1948-1969.
- Liu Q, Gu Y J. 2012. Seismic imaging: From classical to adjoint tomography[J]. Tectonophysics, 566-567: 31-66.
- Liu S L, Yang D H, Dong X P, et al. 2017a. Element-by-element parallel spectral-element methods for 3-D teleseismic wave modeling[J]. Solid Earth, 8(5): 969-986.
- Liu S L, Yang D H, Ma J. 2017b. A modified symplectic PRK scheme for seismic wave modeling[J]. Computers & Geosciences, 99: 28-36.
- Liu T, Zhang H. 2017. Synthetic seismograms for finite sources in spherically symmetric Earth using normal-mode summation[J]. Earthquake Science, 30(3): 125-133.
- Liu Y S, Teng J W, Liu S L, Xu T. 2013. Explicit finite element method with triangle meshes stored by sparse format and its perfectly matched layers absorbing boundary condition[J]. Chinese Journal of Geophysics, 56(9): 3085-3099 (in Chinese).
- Liu Y S, Teng J W, Xu T, et al. 2014. Numerical modeling of seismic wavefield with the SEM based on Triangles[J]. Progress in Geophysics, 29(4): 1715-1726 (in Chinese).
- Liu Y S, Teng J W, Xu T, Badal J. 2017c. Higher-order triangular spectral element method with optimized cubature points for seismic wavefield modeling[J]. Journal of Computational Physics, 336: 458-480.
- Lysmer J, Drake L A. 1972. A Finite Element Method for Seismology[M]//Bolt B A. Methods in Computational Physics: Advances in Research and Applications, 11: 181-216.
- Luan W, Shen W B, Ding H. 2021. Progress and prospect of studies on elastic normal modes of Earth's free oscillation[J]. Reviews of Geophysics and Planetary Physics, 52(3): 308-325 (in Chinese).
- Masson Y, Cupillard P, Capdeville Y, et al. 2014. On the numerical implementation of time-reversal mirrors for tomographic imaging[J]. Geophysical Journal International, 196(3): 1580-1599.
- Masson Y, Romanowicz B. 2017a. Box tomography: localized imaging of remote targets buried in an unknown medium, a step forward for understanding key structures in the deep Earth[J]. Geophysical Journal International, 211(1): 141-163.
- Masson Y, Romanowicz B. 2017b. Fast computation of synthetic seismograms within a medium containing remote localized perturbations: a numerical solution to the scattering problem[J]. Geophysical Journal International, 208(2): 674-692.
- Mita A, Luco J E. 1987. Dynamic-response of embedded foundations-a hybrid approach[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 63(3): 233-259.
- Moczo P, Bystrický E, Kristek J, et al. 1997. Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 87(5): 1305-1323.
- Monteiller V, Chevrot S, Komatitsch D, et al. 2013. A hybrid method to compute short-period synthetic seismograms of teleseismic body waves in a 3-D regional model[J]. Geophysical Journal International, 192(1): 230-247.
- Monteiller V, Chevrot S, Komatitsch D, et al. 2015. Three-dimensional full waveform inversion of short-period teleseismic wavefields based upon the SEM-DSM hybrid method[J]. Geophysical Journal International, 202(2): 811-827.
- Monteiller V, Beller S, Plazolles B, et al. 2020. On the validity of the planar wave approximation to compute synthetic seismograms of teleseismic body waves in a 3-D regional model[J]. Geophysical Journal International, 224(3): 2060-2076.
- Ni S D, Ding X M, Helmberger D V. 2000. Constructing synthetics from deep earth tomographic models[J]. Geophysical Journal International, 140(1): 71-82.
- Ni S D, Cormier V F, Helmberger D V. 2003. A comparison of synthetic seismograms for 2D structures: Semianalytical versus numerical[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 93(6): 2752-2757.
- Nissen-Meyer T, Dahlen F A, Fournier A. 2007a. Spherical-earth frechet sensitivity kernels[J]. Geophysical Journal International, 168(3): 1051-1066.
- Nissen-Meyer T, Fournier A, Dahlen F A. 2007b. A two-dimensional spectral-element method for computing spherical-earth seismograms - I. Moment-tensor source[J]. Geophysical Journal International, 168(3): 1067-1092.
- Nissen-Meyer T, Fournier A, Dahlen F A. 2008. A 2-D spectral-element method for computing spherical-earth seismograms-II. Waves in solid-fluid media[J]. Geophysical Journal International, 174(3): 873-888.
- Nissen-Meyer T, van Driel M, Stahler S C, et al. 2014. AxiSEM: broadband 3-D seismic wavefields in axisymmetric media[J]. Solid Earth, 5(1): 425-445.
- Nolet G. 2008. A Breviary of Seismic Tomography[M]. Cambridge: Cambridge University Press.
- Opršal I, Matyska C, Irikura K. 2010. The source-box wave propagation hybrid methods: general formulation and implementation[J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 176(2): 555-564.
- Paulssen H. 1988. Evidence For Small Scale Structure of The Upper

- Mantle[M]. Instituut voor Aardwetenschappen der Rijksuniversiteit te Utrecht: Geologica Ultraiectina.
- Rayleigh Baron J W S. 1896. *The Theory of Sound* (Vol. 2) [M]. Macmillan.
- Rayleigh L. 1907. On the dynamical theory of gratings[J]. *Proceedings of the Royal Society of London Series a-Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 79(532): 399-416.
- Ritsema J, Van H H J, Woodhouse J. 1999. Complex shear wave velocity structure imaged beneath Africa and Iceland[J]. *Science*, 286: 1925-1928.
- Ritsema J, Deuss A, Van H H J, et al. 2011. S40RTS: a degree-40 shear-velocity model for the mantle from new Rayleigh wave dispersion, teleseismic traveltimes and normal-mode splitting function measurements[J]. *Geophysical Journal International*, 184(3): 1223-1236.
- Robertsson J O A, Chapman C H. 2000. An efficient method for calculating finite-difference seismograms after model alterations[J]. *Geophysics*, 65(3): 907-918.
- Roecker S, Baker B, McLaughlin J. 2010. A finite-difference algorithm for full waveform teleseismic tomography[J]. *Geophysical Journal International*, 181(2): 1017-1040.
- Schmidt H, Tango G. 1986. Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms[J]. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 84(2): 331-359.
- Shtivelman V. 1984. A hybrid method for wave field computation[J]. *Geophysical prospecting*, 32(2): 236-257.
- Shtivelman V. 1985. Two-dimensional acoustic modeling by a hybrid method[J]. *Geophysics*, 50(8): 1273-1284.
- Singh S J, Ben-Menahem A. 1969a. Eigenvibrations of the earth excited by finite dislocations-II Spheroidal oscillations[J]. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 17(3): 333-350.
- Singh S J, Ben-Menahem A. 1969b. Eigenvibrations of the earth excited by finite dislocations—I Toroidal oscillations[J]. *Geophysical Journal International*, 17(2): 151-177.
- Stead R J, Helmberger D V. 1988. Numerical-analytical Interfacing in Two Dimensions with Applications to Modeling NTS Seismograms[M]//Aki K, Wu R-S. *Scattering and Attenuations of Seismic Waves, Part I*. Basel: Birkhäuser Basel, 157-193.
- Taflove A, Hagness S. 2005. *Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method*[J]. Artech house, 5(15): 629-670.
- Takeuchi H, Saito M. 1972. *Seismic Surface Waves*[M]//Bolt B A. *Methods in Computational Physics: Advances in Research and Applications*. Elsevier, 11: 217-295.
- Takeuchi N, Geller R J, Cummins P R. 1996. Highly accurate P-SV complete synthetic seismograms using modified DSM operators[J]. *Geophysical Research Letters*, 23(10): 1175-1178.
- Takeuchi N, Geller R. 2003. Accurate numerical methods for solving the elastic equation of motion for arbitrary source locations[J]. *Geophysical Journal International*, 154: 852-866.
- Tanimoto T. 1984. A simple derivation of the formula to calculate synthetic long-period seismograms in a heterogeneous earth by normal mode summation[J]. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 77(1): 275-278.
- Thomson W T. 1950. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium[J]. *Journal of Applied Physics*, 21(2): 89-93.
- Tong P, Chen C-W, Komatitsch D, et al. 2014a. High-resolution seismic array imaging based on an SEM-FK hybrid method[J]. *Geophysical Journal International*, 197(1): 369-395.
- Tong P, Komatitsch D, Tseng T-L, et al. 2014b. A 3-D spectral-element and frequency-wave number hybrid method for high-resolution seismic array imaging[J]. *Geophysical Research Letters*, 41(20): 7025-7034.
- Tseng T L, Chen W P, Nowack R L. 2009. Northward thinning of Tibetan crust revealed by virtual seismic profiles[J]. *Geophysical Research Letters*, 36: L24304.
- Turcotte D L, Schubert G. 2002. *Geodynamics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press.
- Van Manen D J, Robertsson J O A, Curtis A. 2007. Exact wave field simulation for finite-volume scattering problems[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 122(4): EL115-EL121.
- Wang C Y. 1982. The reflectivity method of synthetic seismogram calculation for layered inhomogeneous media[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 25(5): 424-433 (in Chinese).
- Wang Y, Chevrot S, Monteiller V, et al. 2016. The deep roots of the western Pyrenees revealed by full waveform inversion of teleseismic P waves[J]. *Geology*, 44(6): 475-478.
- Wen L X, Yao Z X. 1994. Theory and application of hybrid method seismograms[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 37(2): 211-219 (in Chinese).
- Wen L X, Helmberger D V. 1998a. A two-dimensional P-SV hybrid method and its application to modeling localized structures near the core-mantle boundary[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 103(B8): 17901-17918.
- Wen L X, Helmberger D V. 1998b. Ultra-low velocity zones near the core-mantle boundary from broadband PKP precursors[J]. *Science*, 279(5357): 1701-1703.
- Wen L X. 2002. An SH hybrid method and shear velocity structures in the lowermost mantle beneath the central Pacific and South Atlantic Oceans[J]. *Journal of Geophysical Research-Solid Earth*, 107(B3): 2055.
- Wen L X, Niu F L. 2002. Seismic velocity and attenuation structures in the top of the Earth's inner core[J]. *Journal of Geophysical Research*, 107(B11): ESE 2-1-ESE 2-13.
- Wiggins R A. 1976. A fast, new computational algorithm for free oscillations and surface waves[J]. *Geophysical Journal International*, 47(1): 135-150.
- Woodhouse J H. 1988. The calculation of the eigenfrequencies and eigenfunctions of the free oscillations of the Earth and the Sun[J]. *Seismological Algorithms*, 230: 321-370.
- Wu S L, Nozu A, Nagasaka Y. 2020. Accuracy of near-fault fling-step displacements estimated using the discrete wavenumber method[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*.
- Wu W, Ni S, Zhan Z, et al. 2018. An SEM-DSM three-dimensional hybrid method for modelling teleseismic waves with complicated source-side structures[J]. *Geophysical Journal International*, 215(1): 133-154.
- Xie X B, Zheng T Y, Yao Z X. 1992. Methods of synthetic seismograms—a review[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 35(6): 790-801 (in Chinese).

- Yang H-Y, Zhao L, Hung S-H. 2010. Synthetic seismograms by normal-mode summation: a new derivation and numerical examples[J]. *Geophysical Journal International*, 183(3): 1613-1632.
- Yao Z X. 1979. Generalized reflection coefficients for a layered medium and asymmetrical source[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 22(2): 181-194 (in Chinese).
- Yao Z X. 1980. The reflectivity method for a buried shear dislocation source[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 23(3): 306-311, 343-344 (in Chinese).
- Yao Z X, Zheng T Y. 1994. Theory of seismic wave propagation and its application[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 37(A01): 160-171 (in Chinese).
- Yoshimura C, Bielak J, Hisada Y, et al. 2003. Domain reduction method for three-dimensional earthquake modeling in localized regions, part II: Verification and applications[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 93(2): 825-841.
- Zahradnik J, Moczo P. 1996. Hybrid seismic modeling based on discrete-wave number and finite-difference methods[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 148(1-2): 21-38.
- Zhang H M, Chen X F, Chang S. 2003. An efficient numerical method for computing synthetic seismograms for a layered half-space with sources and receivers at close or same depths[J]. *Pure Applied Geophysics*, 160(3): 467-486.
- Zhang M H, Liu Y S, Hou J, et al. 2019. Review of seismic tomography methods in near surface structures reconstruction[J]. *Progress in Geophysics*, 34(1): 48-63 (in Chinese).
- Zhao L, Wen L X, Chen L, et al. 2008. A two-dimensional hybrid method for modeling seismic wave propagation in anisotropic media[J]. *Journal of Geophysical Research*, 113(B12): B12307.
- Zhou H, Chen X F. 2006. A new approach to simulate scattering of SH waves by an irregular topography[J]. *Geophysical Journal International*, 164(2): 449-459.
- Zhou H, Chen X F. 2008. The localized boundary integral equation discrete wavenumber method for simulating P-SV wave scattering by an irregular topography[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 98(1): 265-279.
- Zhu L B. 1989. Maslov's asymptotic method of calculating the theoretical seismogram of body waves in the lateral inhomogeneous medium[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 32(2): 163-172 (in Chinese).
- Zhu L P, Rivera L A. 2002. A note on the dynamic and static displacements from a point source in multilayered media[J]. *Geophysical Journal International*, 148(3): 619-627.
- Zhu R Y. 1990. WKB method of theoretical seismogram calculation for attenuation media[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, (Sup.): 212-224 (in Chinese).

## 附中文参考文献

- 李旭, 陈运泰. 1996. 合成地震图的广义反射透射系数矩阵方法[J]. *地震地磁观测与研究*, 17(3): 1-20.
- 李幼铭, 孙永智, 姚振兴. 1980. 关于“反射法”计算综合地震图的实施方案[J]. *地球物理学报*, 23(4): 389-395.
- 刘有山, 滕吉文, 刘少林, 徐涛. 2013. 稀疏存储的显式有限元三角网格地震波数值模拟及其 PML 吸收边界条件[J]. *地球物理学报*, 56(9): 3085-3099.
- 刘有山, 滕吉文, 徐涛, 等. 2014. 三角网格谱元法地震波场数值模拟[J]. *地球物理学进展*, 29(4): 1715-1726.
- 栾威, 申文斌, 丁浩. 2021. 地球自由振荡弹性简正模研究进展与展望[J]. *地球与行星物理论评*, 52(3): 308-325.
- 王椿镛. 1982. 层状不均匀介质中合成地震图的反射率法[J]. *地球物理学报*, 25(5): 424-433.
- 温联星, 姚振兴. 1994. 用广义射线和有限差分计算近场理论地震图的混合方法[J]. *地球物理学报*, 37(2): 211-219.
- 谢小碧, 郑天愉, 姚振兴. 1992. 理论地震图计算方法[J]. *地球物理学报*, 35(6): 790-801.
- 姚振兴. 1979. 层状介质、非轴对称震源情况下的反射法[J]. *地球物理学报*, 22(2): 181-194.
- 姚振兴. 1980. 剪切位错内源的反射法[J]. *地球物理学报*, 23(3): 306-311, 343-344.
- 姚振兴, 郑天愉. 1994. 地震波传播理论和应用研究[J]. *地球物理学报*, 37(A01): 160-171.
- 张明辉, 刘有山, 侯爵, 等. 2019. 近地表地震层析成像方法综述[J]. *地球物理学进展*, 34(1): 48-63.
- 朱良保. 1989. 计算横向非均匀介质体波理论地震图的 Maslov 渐近法[J]. *地球物理学报*, 32(2): 163-172.
- 朱仁益. 1990. 用 WKB 法计算衰减介质中的理论地震图 [J]. *地球物理学报*, (增刊): 212-224.