

范娜, 成景旺, 秦雷等. 2018. 一种优化的频率域三维声波有限差分模拟方法. 地球物理学报, 61(3):1095-1108, doi:10.6038/cjg2018L0375.

Fan N, Cheng J W, Qin L, et al. 2018. An optimal method for frequency-domain finite-difference solution of 3D scalar wave equation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 61(3):1095-1108, doi:10.6038/cjg2018L0375.

一种优化的频率域三维声波有限差分模拟方法

范娜^{1,2,3*}, 成景旺^{1,3}, 秦雷⁴, 赵连锋⁵, 谢小碧⁶, 姚振兴⁵

1 油气资源与勘探技术教育部重点实验室(长江大学), 武汉 430100

2 非常规油气湖北协同创新中心, 武汉 430100

3 长江大学地球物理与石油资源学院, 武汉 430100

4 中石化地球物理公司华东分公司, 南京 211112

5 中国科学院地质与地球物理研究所, 中国科学院地球与行星物理重点实验室, 北京 100029

6 美国加州大学圣克鲁兹分校地球物理与行星物理研究所, 圣克鲁兹 95064

摘要 为提高频率域有限差分(FD, finite-difference)正演模拟技术的计算精度和效率,基于旋转坐标系统的优化差分格式被广泛应用,但是只应用于正方形网格的情况.基于平均导数法(ADM)的优化差分格式,应用于正方形和长方形网格模拟.这些频率域有限差分算子,各自具有不同的差分格式和对应的优化系数求解表达式.本文基于三维声波方程发展了一种新的优化方法,只要给定FD模板形式,可直接构造频散方程,求取FD模板上各节点的优化系数.此方法的优点在于频率域FD算子的优化系数对应各个节点,可扩展优化其他格式.运用此优化方法,计算得到了不同空间采样间距比情况下27点和7点格式的优化系数.数值实验表明,优化27点格式与ADM27点格式具有相同的精度,优化7点格式比经典的7点格式具有更小的数值频散.

关键词 三维声波方程; 频率域; 有限差分; 优化系数

doi:10.6038/cjg2018L0375

中图分类号 P631

收稿日期 2017-06-22, 2018-01-10 收修定稿

An optimal method for frequency-domain finite-difference solution of 3D scalar wave equation

FAN Na^{1,2,3*}, CHENG JingWang^{1,3}, QIN Lei⁴, ZHAO LianFeng⁵, XIE XiaoBi⁶, YAO ZhenXing⁵

1 Key Laboratory of Exploration Technologies for Oil and Gas Resources (Yangtze University), Ministry of Education, Wuhan 430100, China

2 Hubei Cooperative Innovation Center of Unconventional Oil and Gas, Wuhan 430100, China

3 School of Geophysics and Oil Resources, Yangtze University, Wuhan 430100, China

4 Sinopec Geophysical Corporation Huadong Branch, Nanjing 211112, China

5 Key Laboratory of Earth and Planetary Physics, Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China

6 Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California at Santa Cruz 95064, California, USA

Abstract To increase the computational accuracy and efficiency of frequency-domain finite-difference (FD) modeling method, the optimal FD scheme with rotated coordinate system were widely used. It requires the same spatial sampling intervals in horizontal and vertical directions, which limited their applications in practice. Later the average-derivative method (ADM) was

基金项目 国家自然科学基金(41604037, 41504102, 41674107, 41504077)和油气资源与勘探技术教育部重点实验室(长江大学)开放基金(K2016-02)联合资助.

第一作者简介 范娜,女,1989年生,讲师,主要从事地震波正演模拟研究. E-mail: fannachina@hotmail.com

proposed to work with the rectangular-grid modeling. However, these frequency-domain FD operators, unlike the time-domain FD operators of which the coefficients can be determined by a general optimal method even with different stencils, usually have their own forms of differential equations with different distributions of optimized coefficients. In this paper, we develop a general optimal method for frequency-domain FD modeling based on 3D acoustic wave equation. For a given finite-difference stencil, this method can generate the dispersion equation and optimize the expansion coefficients. The advantage of this method is that the optimized coefficients correspond to the grid nodes of FD stencil and it is very easy to expand to other FD schemes. We computed the optimized coefficients of 27- and 7- point schemes with different aspect ratios. Numerical experiments demonstrate that our optimal 27-point scheme have the same accuracy with ADM 27-point scheme and our optimal 7-point scheme have higher accuracy than the classical 7-point scheme.

Keywords 3D acoustic wave equation; Frequency domain; Finite difference; Optimized coefficients

0 引言

频率域有限差分正演模拟可用于全波形反演和逆时偏移,在地震波场模拟中占有重要地位(e. g. Pratt, 1999; Brossier et al., 2009; Virieux and Operto, 2009; Loewenthal and Mufti, 1983; Plessix and Mulder, 2004; Kim et al., 2011). 相比于时间域模拟,具有无时间频散和累积误差,适合多炮并行运算,频带选取灵活,易于模拟非弹性效应等优点. Pratt 和 Worthington (1990)基于 2D 声波方程提出了经典的 5 点频率域有限差分格式,但是数值频散严重. 为提高计算精度,基于旋转坐标的 FD 格式被广泛应用(e. g. Jo et al., 1996; Shin and Sohn, 1998; Štekl and Pratt, 1998; Hustedt et al., 2004; Operto et al., 2007, 2009, 2014; 曹书红和陈景波, 2012). Jo 等(1996)利用 0° 和 45° 方向的组合差分近似拉普拉斯算子,对 2D 声波方程提出了优化 9 点差分格式,频散曲线得到较大的改进. 之后,Operto 等(2007)将其扩展至基于 3D 黏弹性声波方程的 27 点格式. 但是旋转坐标的 FD 格式只适用于空间横纵向等间隔采样的情况,使得此种方法在实际波场模拟中受限. 为了适应长方形网格的模拟,平均导数法(ADM, average-derivative method)应运而生(Chen, 2012; 张衡等, 2014; Zhang et al., 2015; Tang et al. 2015; Chen and Cao, 2016). Chen(2012)对 2D 声波方程提出了基于平均导数法的优化 9 点格式,这种格式包含了旋转 9 点格式. 之后 Chen (2014)将其扩展至 3D 声波情况. 以上基于旋转坐标的优化格式均是对应基于平均导数法优化

格式的一种特殊形式,理论上平均导数优化格式的精度要优于相应的旋转坐标优化格式.

在时间域有限差分正演算法中,往往存在一般性通用的 FD 算子系数确定方法(e. g. Holberg, 1987; Liu and Sen, 2009; Chu and Stoffa, 2012; Zhang and Yao, 2012, 2013). 只要给定 FD 算子的模板,就能利用最优化的频散关系确定每个 FD 模板节点上对应的系数. 而目前基于 2D 声波方程频率域 FD 算子格式有多种,比如 9 点,15 点,17 点,25 点等各种格式的算法,其对应的算子系数确定方法也各不相同(e. g. Jo et al., 1996; Min et al., 2000; Chen, 2012; 张衡等, 2014; 刘璐等, 2013; Tang et al., 2015; Gu et al., 2013). Fan 等(2017)基于 2D 声波方程提出了一个适用性较广的优化方法,此方法几乎可以优化 2D 情况下的各种差分格式. 本文将 Fan 等(2017)提出的 2D 频率域优化方法扩展至 3D 声波情况. 只要给定 3D 的 FD 模板格式,便可利用此方法求解出对应的优化系数.

1 理论

1.1 差分格式

频率域三维声波方程可写为

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} P = 0, \quad (1)$$

其中, P 是位移分量, ω 是角频率, v 是声波速度.

假设周围几个点的波场值对中心点二阶空间导数的近似都有一定程度的贡献,且到中心点距离相等的点权值大小相等. 我们首先采用以下常用的 3D 27 点格式近似空间导数(图 1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \approx & \frac{1}{\Delta x^2} [c_0 P_{m,l,n} + c_1 (P_{m-1,l,n} + P_{m+1,l,n}) + c_2 (P_{m,l-1,n} + P_{m,l+1,n}) + c_3 (P_{m,l,n-1} + P_{m,l,n+1}) \\ & + c_4 (P_{m-1,l-1,n} + P_{m+1,l+1,n} + P_{m-1,l+1,n} + P_{m+1,l-1,n}) + c_5 (P_{m-1,l,n-1} + P_{m+1,l,n+1} + P_{m-1,l,n+1} + P_{m+1,l,n-1}) \\ & + c_6 (P_{m,l-1,n-1} + P_{m,l+1,n+1} + P_{m,l-1,n+1} + P_{m,l+1,n-1}) \\ & + c_7 (P_{m-1,l-1,n-1} + P_{m+1,l-1,n-1} + P_{m-1,l+1,n-1} + P_{m+1,l+1,n-1} + P_{m-1,l-1,n+1} + P_{m+1,l-1,n+1} \\ & + P_{m-1,l+1,n+1} + P_{m+1,l+1,n+1})], \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \approx & \frac{1}{\Delta y^2} [e_0 P_{m,l,n} + e_1 (P_{m-1,l,n} + P_{m+1,l,n}) + e_2 (P_{m,l-1,n} + P_{m,l+1,n}) + e_3 (P_{m,l,n-1} + P_{m,l,n+1}) \\ & + e_4 (P_{m-1,l-1,n} + P_{m+1,l+1,n} + P_{m-1,l+1,n} + P_{m+1,l-1,n}) + e_5 (P_{m-1,l,n-1} + P_{m+1,l,n+1} + P_{m-1,l,n+1} + P_{m+1,l,n-1}) \\ & + e_6 (P_{m,l-1,n-1} + P_{m,l+1,n+1} + P_{m,l-1,n+1} + P_{m,l+1,n-1}) \\ & + e_7 (P_{m-1,l-1,n-1} + P_{m+1,l-1,n-1} + P_{m-1,l+1,n-1} + P_{m+1,l+1,n-1} + P_{m-1,l-1,n+1} + P_{m+1,l-1,n+1} \\ & + P_{m-1,l+1,n+1} + P_{m+1,l+1,n+1})], \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \approx & \frac{1}{\Delta z^2} [d_0 P_{m,l,n} + d_1 (P_{m-1,l,n} + P_{m+1,l,n}) + d_2 (P_{m,l-1,n} + P_{m,l+1,n}) + d_3 (P_{m,l,n-1} + P_{m,l,n+1}) \\ & + d_4 (P_{m-1,l-1,n} + P_{m+1,l+1,n} + P_{m-1,l+1,n} + P_{m+1,l-1,n}) + d_5 (P_{m-1,l,n-1} + P_{m+1,l,n+1} + P_{m-1,l,n+1} + P_{m+1,l,n-1}) \\ & + d_6 (P_{m,l-1,n-1} + P_{m,l+1,n+1} + P_{m,l-1,n+1} + P_{m,l+1,n-1}) \\ & + d_7 (P_{m-1,l-1,n-1} + P_{m+1,l-1,n-1} + P_{m-1,l+1,n-1} + P_{m+1,l+1,n-1} + P_{m-1,l-1,n+1} + P_{m+1,l-1,n+1} \\ & + P_{m-1,l+1,n+1} + P_{m+1,l+1,n+1})], \end{aligned} \quad (2c)$$

式中, $P_{m,l,n} = P(m\Delta x, l\Delta y, n\Delta z)$, Δx , Δy 和 Δz 分别是 x 、 y 和 z 方向的空间采样间隔, c_i 、 e_i 、 d_i 分别表示不同距离的点对 $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$ 近似的权值, 角标 i 的编号位置如图 1 所示, c_i 、 e_i 、 d_i 满足以下关系式:

$$c_0 + 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 4c_4 + 4c_5 + 4c_6 + 8c_7 = 0, \quad (3a)$$

$$e_0 + 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 + 4e_4 + 4e_5 + 4e_6 + 8e_7 = 0, \quad (3b)$$

$$d_0 + 2d_1 + 2d_2 + 2d_3 + 4d_4 + 4d_5 + 4d_6 + 8d_7 = 0. \quad (3c)$$

对于质量加速度项 $\frac{\omega^2}{v^2} P$ 的近似同样采用 27 点

形式, 并代入式(1)中, 得到 3D 声波方程的频率域差分格式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^2} [& c_0 P_{m,l,n} + c_1 (P_{m-1,l,n} + P_{m+1,l,n}) + c_2 (P_{m,l-1,n} + P_{m,l+1,n}) + c_3 (P_{m,l,n-1} + P_{m,l,n+1}) \\ & + c_4 (P_{m-1,l-1,n} + P_{m+1,l+1,n} + P_{m-1,l+1,n} + P_{m+1,l-1,n}) + c_5 (P_{m-1,l,n-1} + P_{m+1,l,n+1} + P_{m-1,l,n+1} + P_{m+1,l,n-1}) \\ & + c_6 (P_{m,l-1,n-1} + P_{m,l+1,n+1} + P_{m,l-1,n+1} + P_{m,l+1,n-1}) \\ & + c_7 (P_{m-1,l-1,n-1} + P_{m+1,l-1,n-1} + P_{m-1,l+1,n-1} + P_{m+1,l+1,n-1} + P_{m-1,l-1,n+1} + P_{m+1,l-1,n+1} + P_{m-1,l+1,n+1} + P_{m+1,l+1,n+1}) \\ & + \frac{1}{\Delta y^2} [e_0 P_{m,l,n} + e_1 (P_{m-1,l,n} + P_{m+1,l,n}) + e_2 (P_{m,l-1,n} + P_{m,l+1,n}) + e_3 (P_{m,l,n-1} + P_{m,l,n+1}) \\ & + e_4 (P_{m-1,l-1,n} + P_{m+1,l+1,n} + P_{m-1,l+1,n} + P_{m+1,l-1,n}) + e_5 (P_{m-1,l,n-1} + P_{m+1,l,n+1} + P_{m-1,l,n+1} + P_{m+1,l,n-1}) \\ & + e_6 (P_{m,l-1,n-1} + P_{m,l+1,n+1} + P_{m,l-1,n+1} + P_{m,l+1,n-1}) \\ & + e_7 (P_{m-1,l-1,n-1} + P_{m+1,l-1,n-1} + P_{m-1,l+1,n-1} + P_{m+1,l+1,n-1} + P_{m-1,l-1,n+1} + P_{m+1,l-1,n+1} + P_{m-1,l+1,n+1} + P_{m+1,l+1,n+1}) \\ & + \frac{1}{\Delta z^2} [d_0 P_{m,l,n} + d_1 (P_{m-1,l,n} + P_{m+1,l,n}) + d_2 (P_{m,l-1,n} + P_{m,l+1,n}) + d_3 (P_{m,l,n-1} + P_{m,l,n+1}) \end{aligned}$$

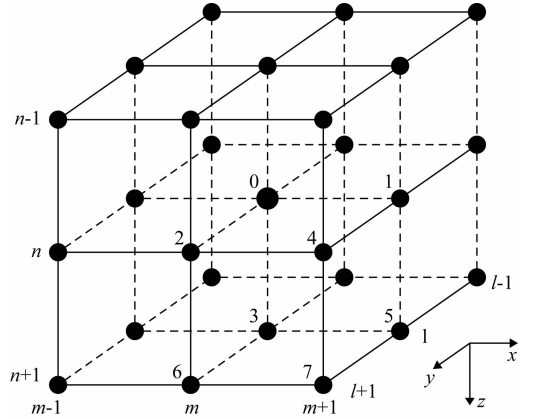


图 1 频率域三维有限差分算子

Fig. 1 Grid configurations for 3D frequency-domain FD operator

$$\begin{aligned}
& + d_4(P_{m-1,l-1,n} + P_{m+1,l+1,n} + P_{m-1,l+1,n} + P_{m+1,l-1,n}) + d_5(P_{m-1,l,n-1} + P_{m+1,l,n+1} + P_{m-1,l,n+1} + P_{m+1,l,n-1}) \\
& + d_6(P_{m,l-1,n-1} + P_{m,l+1,n+1} + P_{m,l-1,n+1} + P_{m,l+1,n-1}) \\
& + d_7(P_{m-1,l-1,n-1} + P_{m+1,l-1,n-1} + P_{m-1,l+1,n-1} + P_{m+1,l+1,n-1} + P_{m-1,l-1,n+1} + P_{m+1,l-1,n+1} + P_{m-1,l+1,n+1} + P_{m+1,l+1,n+1}) \\
& + \frac{\omega^2}{v^2} [b_0 P_{m,l,n} + b_1(P_{m-1,l,n} + P_{m+1,l,n}) + b_2(P_{m,l-1,n} + P_{m,l+1,n}) + b_3(P_{m,l,n-1} + P_{m,l,n+1}) \\
& + b_4(P_{m-1,l-1,n} + P_{m+1,l+1,n} + P_{m-1,l+1,n} + P_{m+1,l-1,n}) + b_5(P_{m-1,l,n-1} + P_{m+1,l,n+1} + P_{m-1,l,n+1} + P_{m+1,l,n-1}) \\
& + b_6(P_{m,l-1,n-1} + P_{m,l+1,n+1} + P_{m,l-1,n+1} + P_{m,l+1,n-1}) \\
& + b_7(P_{m-1,l-1,n-1} + P_{m+1,l-1,n-1} + P_{m-1,l+1,n-1} + P_{m+1,l+1,n-1} + P_{m-1,l-1,n+1} + P_{m+1,l-1,n+1} + P_{m-1,l+1,n+1} \\
& + P_{m+1,l+1,n+1})] = 0, \tag{4}
\end{aligned}$$

式中, b_i 表示不同距离的点对平均质量加速项 $\frac{\omega^2}{v^2} P$ 近似的权值, 且满足以下关系式:

$$b_0 + 2b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 4b_4 + 4b_5 + 4b_6 + 8b_7 = 1, \tag{5}$$

27 点差分格式(4)实际上是一种通用的格式, 其他常见的 3D 差分格式包括经典的 7 点格式和 ADM

27 点格式均是差分格式(4)的一种特殊形式, 其对比关系详见附录.

我们首先考虑 $\Delta x = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 的情况, 对于其他两种的情况后续进行讨论. 将采样间隔比 $r_1 = \Delta x/\Delta y, r_2 = \Delta x/\Delta z$ 代入式(4), 并令

$$a_i = c_i + r_1^2 e_i + r_2^2 d_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 7), \tag{6}$$

得到:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x^2} [a_0 P_{m,l,n} + a_1(P_{m-1,l,n} + P_{m+1,l,n}) + a_2(P_{m,l-1,n} + P_{m,l+1,n}) + a_3(P_{m,l,n-1} + P_{m,l,n+1}) \\
& + a_4(P_{m-1,l-1,n} + P_{m+1,l+1,n} + P_{m-1,l+1,n} + P_{m+1,l-1,n}) + a_5(P_{m-1,l,n-1} + P_{m+1,l,n+1} + P_{m-1,l,n+1} + P_{m+1,l,n-1}) \\
& + a_6(P_{m,l-1,n-1} + P_{m,l+1,n+1} + P_{m,l-1,n+1} + P_{m,l+1,n-1}) \\
& + a_7(P_{m-1,l-1,n-1} + P_{m+1,l-1,n-1} + P_{m-1,l+1,n-1} + P_{m+1,l+1,n-1} + P_{m-1,l-1,n+1} + P_{m+1,l-1,n+1} + P_{m-1,l+1,n+1} + P_{m+1,l+1,n+1}) \\
& + \frac{\omega^2}{v^2} [b_0 P_{m,l,n} + b_1(P_{m-1,l,n} + P_{m+1,l,n}) + b_2(P_{m,l-1,n} + P_{m,l+1,n}) + b_3(P_{m,l,n-1} + P_{m,l,n+1}) \\
& + b_4(P_{m-1,l-1,n} + P_{m+1,l+1,n} + P_{m-1,l+1,n} + P_{m+1,l-1,n}) + b_5(P_{m-1,l,n-1} + P_{m+1,l,n+1} + P_{m-1,l,n+1} + P_{m+1,l,n-1}) \\
& + b_6(P_{m,l-1,n-1} + P_{m,l+1,n+1} + P_{m,l-1,n+1} + P_{m,l+1,n-1}) \\
& + b_7(P_{m-1,l-1,n-1} + P_{m+1,l-1,n-1} + P_{m-1,l+1,n-1} + P_{m+1,l+1,n-1} + P_{m-1,l-1,n+1} + P_{m+1,l-1,n+1} + P_{m-1,l+1,n+1} + P_{m+1,l+1,n+1}) \\
& = 0, \tag{7}
\end{aligned}$$

其中,

$$a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 4a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 8a_7 = 0, \tag{8}$$

式(7)成为简化后最终的 27 点差分格式, 式中仅有 14 个相互独立的系数.

1.2 频散分析

采用经典的频散分析方法, 将平面波 $P(x, y, z, \omega) = P_0 e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}$ 代入到差分格式(7)中, 得到以下相速度频散关系表达式:

$$\frac{V_{\text{ph}}}{v} = \frac{G}{2\pi} \sqrt{-\frac{a_0 + 2a_1 T_1 + 2a_2 T_2 + 2a_3 T_3 + 4a_4 T_4 + 4a_5 T_5 + 4a_6 T_6 + 8a_7 T_7}{b_0 + 2b_1 T_1 + 2b_2 T_2 + 2b_3 T_3 + 4b_4 T_4 + 4b_5 T_5 + 4b_6 T_6 + 8b_7 T_7}}, \tag{9}$$

式中, V_{ph} 是相速度,

$$T_1 = \cos\left(\frac{2\pi \sin\theta \cos\phi}{G}\right), \quad T_2 = \cos\left(\frac{2\pi \sin\theta \sin\phi}{r_1 G}\right),$$

$$T_3 = \cos\left(\frac{2\pi \cos\theta}{r_2 G}\right),$$

$$T_4 = \cos\left(\frac{2\pi \sin\theta \cos\phi}{G}\right) \cos\left(\frac{2\pi \sin\theta \sin\phi}{r_1 G}\right),$$

$$T_5 = \cos\left(\frac{2\pi \sin\theta \cos\phi}{G}\right) \cos\left(\frac{2\pi \cos\theta}{r_2 G}\right),$$

$$T_6 = \cos\left(\frac{2\pi \sin\theta \sin\phi}{r_1 G}\right) \cos\left(\frac{2\pi \cos\theta}{r_2 G}\right),$$

$$T_7 = \cos\left(\frac{2\pi \sin\theta \cos\phi}{G}\right) \cos\left(\frac{2\pi \sin\theta \sin\phi}{r_1 G}\right) \cos\left(\frac{2\pi \cos\theta}{r_2 G}\right),$$

每波长的采样点数 G 与最大采样间隔 $\max(\Delta x, \Delta y,$

Δz) 有关. 对于 $\Delta x = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 的情况 $G = 2\pi/(k\Delta x)$. θ 是声波传播方向与 z 方向的夹角, ϕ 是方位角, 即传播方向的水平投影量与 x 方向的夹角, 满足关系式 $k_x = k\sin\theta\cos\phi$, $k_y = k\sin\theta\sin\phi$, $k_z = k\cos\theta$. 最小化以下相速度误差函数即可求取 14 个独立系数 $a_i, b_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 的值,

$$E(a_1, \dots, a_7, b_1, \dots, b_7) = \iiint \left[1 - \frac{V_{\text{ph}}}{v} \right]^2 d\bar{k} d\theta d\phi, \quad (10)$$

其中, $\bar{k} = 1/G$, 传播角度 θ 和方位角 ϕ 取值范围为 $[0, \pi/2]$, \bar{k} 的取值范围根据 FD 模板的点数与形状进行选取.

$$E_1 = \frac{c_0 + 2c_1T_1 + 2c_2T_2 + 2c_3T_3 + 4c_4T_4 + 4c_5T_5 + 4c_6T_6 + 8c_7T_7}{b_0 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + 2b_3T_3 + 4b_4T_4 + 4b_5T_5 + 4b_6T_6 + 8b_7T_7} + \left(\frac{2\pi\sin\theta\cos\phi}{G} \right)^2, \quad (12a)$$

$$E_2 = \frac{e_0 + 2e_1T_1 + 2e_2T_2 + 2e_3T_3 + 4e_4T_4 + 4e_5T_5 + 4e_6T_6 + 8e_7T_7}{b_0 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + 2b_3T_3 + 4b_4T_4 + 4b_5T_5 + 4b_6T_6 + 8b_7T_7} + \left(\frac{2\pi\sin\theta\sin\phi}{r_1G} \right)^2, \quad (12b)$$

$$E_3 = \frac{d_0 + 2d_1T_1 + 2d_2T_2 + 2d_3T_3 + 4d_4T_4 + 4d_5T_5 + 4d_6T_6 + 8d_7T_7}{b_0 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + 2b_3T_3 + 4b_4T_4 + 4b_5T_5 + 4b_6T_6 + 8b_7T_7} + \left(\frac{2\pi\cos\theta}{r_2G} \right)^2. \quad (12c)$$

则最小化以下目标函数即可求取 c_i, e_i, d_i 的值

$$E = \iiint (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) d\bar{k} d\theta d\phi, \quad (13)$$

式中, \bar{k}, θ, ϕ 取值范围与式(10)保持一致. 由于 $c_i, e_i, d_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 满足关系式(6), 上式目标函数实际只需要求解 14 个相互独立系数.

对于 27 点格式, 首先通过优化式(10)求取 a_i 和 $b_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 的值, 然后通过优化式(13)求取 $c_i, d_i, e_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 的值, 整个过程中总共需要确定 28 个独立的系数. 我们采用 MATLAB 软件中的约束非线性最优化函数 `fmincon` 求取式(10)和(13)中的优化系数. 传播角度 θ 和 ϕ 取值范围均为 $[0, \pi/2]$, 间隔为 $\pi/200$. \bar{k} 的取值范围为 $[0, 0.25]$, 间隔为 0.0025. 给定不同的 r_1 和 r_2 , 即可得到 27 点格式的 28 个相互独立的优化系数如表 1. ADM 27 点格式是优化 27 点格式的一种特殊形式(见附录), 图 2 给出两种优化格式的频散曲线对比, 图中不同颜色的曲线代表不同的传播方向, 可以看出两种优化格式具有相同的精度.

前面只考虑了 $\Delta x = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 的情况, 对于 $\Delta y = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 和 $\Delta z = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 的情况, 由于 27 点格式具有几何对称性, $\Delta x = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 情况下 $a_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 的值若按顺序赋给 $a_2, a_3, a_1, a_6, a_4, a_5, a_7$ 即可得到 $\Delta y = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 情况下的优化系数, 若按顺序赋

1.3 边界条件

采用目前使用广泛的 PML 吸收边界条件. PML 层内部的频率域声波方可写为(Tang et al., 2015; Fan et al., 2017):

$$\frac{1}{s_x^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{s_y^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{1}{s_z^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} P = 0, \quad (11)$$

其中, $s_x = 1 - 2\pi af \frac{i}{\omega} \left(\frac{x}{L} \right)^2$, $s_y = 1 - 2\pi af \times \frac{i}{\omega} \left(\frac{y}{L} \right)^2$, $s_z = 1 - 2\pi af \frac{i}{\omega} \left(\frac{z}{L} \right)^2$, L 是 PML 层的厚度, f 一般为震源子波的主频, a 取值 1.79. 显然, PML 方程式(11)需要确定 c_i, e_i, d_i 的值, 虽然他们满足关系式(6), 仍需要寻找其他优化关系确定其值. 为此, 构建以下函数:

给 $a_3, a_1, a_2, a_5, a_6, a_4, a_7$ 即可得到 $\Delta z = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 情况下的优化系数.

优化方法除了能优化 27 点格式, 也能优化其他 3D 频率域有限差分格式, 比如 7 点格式. 设定 \bar{k} 的取值范围为 $[0, 0.1]$, 间隔为 0.001. 对于 $\Delta x = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 的情况, 给定不同的 r_1 和 r_2 , 可得 7 点格式的 12 个相互独立的优化系数如表 2. 经典的 7 点格式也是本文的 7 点格式的一种特殊形式(见附录). 图 3 给出了两种差分格式的频散曲线对比, 可以看出本文的 7 点格式比经典的 7 点格式具有更高的精度. 以 $\pm 1\%$ 的相速度误差为标准, 经典的 7 点格式每波长采样点需要达到 12.7 个, 而本文的优化 7 点格式只需要 8.8 个.

2 数值实验

为了测试本文的 27 点优化格式的精度, 分别采用 ADM 27 点格式、本文的 27 点格式以及解析法对一个均匀各向同性的介质模型进行正演计算, 其中解析解与 Chen (2014) 的方法一致. 模型大小为 $960 \text{ m} \times 960 \text{ m} \times 960 \text{ m}$, 波速为 $3500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 震源位于模型中心处, 时间函数采用主频为 30 Hz 的雷克子波. 模型采用正方体网格剖分, 即 $r_1 = 1.0, r_2 = 1.0$, 网格间距 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 16 \text{ m}$. 图 4 给出了三种方法的结果对比图, 其中图 4a 和 4b 是两种数值方

表 1 当 $\Delta x = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 时, 不同 r_1 和 r_2 情况下 27 点格式的优化系数Table 1 Optimized coefficients for 27-point scheme with different r_1, r_2 values and $\Delta x = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$

	$r_1=1 \ r_2=1$	$r_1=1 \ r_2=2$	$r_1=1 \ r_2=3$	$r_1=2 \ r_2=1$	$r_1=2 \ r_2=2$	$r_1=2 \ r_2=3$
c_1	$6.425297160 \times 10^{-1}$	$6.829412350 \times 10^{-1}$	$7.374565490 \times 10^{-1}$	$6.579093393 \times 10^{-1}$	$9.214658675 \times 10^{-1}$	$9.816846591 \times 10^{-1}$
c_2	$-1.591251038 \times 10^{-1}$	$-1.184705391 \times 10^{-1}$	$-4.152799652 \times 10^{-2}$	$-1.409027382 \times 10^{-1}$	$1.541271440 \times 10^{-1}$	$2.086332624 \times 10^{-1}$
c_3	$-1.584982075 \times 10^{-1}$	$-1.176705108 \times 10^{-1}$	$-6.597023933 \times 10^{-2}$	$-1.336596054 \times 10^{-1}$	$9.276116481 \times 10^{-2}$	$1.901601824 \times 10^{-1}$
c_4	$8.020046011 \times 10^{-2}$	$5.856877853 \times 10^{-2}$	$1.795756926 \times 10^{-2}$	$7.122772983 \times 10^{-2}$	$-7.001209542 \times 10^{-2}$	$-1.044264729 \times 10^{-1}$
c_5	$7.969825715 \times 10^{-2}$	$5.814597193 \times 10^{-2}$	$3.048012556 \times 10^{-2}$	$6.703822778 \times 10^{-2}$	$-6.486450663 \times 10^{-2}$	$-9.520627853 \times 10^{-2}$
c_6	$-1.859048914 \times 10^{-2}$	$-4.027248816 \times 10^{-2}$	$-7.914272078 \times 10^{-2}$	$-3.228407585 \times 10^{-2}$	$-1.801229088 \times 10^{-1}$	$-2.075316829 \times 10^{-1}$
c_7	$9.083555457 \times 10^{-3}$	$2.065256380 \times 10^{-2}$	$4.117723297 \times 10^{-2}$	$1.612189113 \times 10^{-2}$	$8.685755262 \times 10^{-2}$	$1.041626006 \times 10^{-1}$
e_1	$-1.594796213 \times 10^{-1}$	$-1.217054955 \times 10^{-1}$	$-5.979298039 \times 10^{-2}$	$-1.654468938 \times 10^{-1}$	$-1.375602712 \times 10^{-1}$	$-1.708852615 \times 10^{-1}$
e_2	$6.421828544 \times 10^{-1}$	$6.794839411 \times 10^{-1}$	$7.191376228 \times 10^{-1}$	$6.468138046 \times 10^{-1}$	$6.914456388 \times 10^{-1}$	$6.618714978 \times 10^{-1}$
e_3	$-1.588536012 \times 10^{-1}$	$-1.207499188 \times 10^{-1}$	$-8.301847539 \times 10^{-2}$	$-1.661131298 \times 10^{-1}$	$-2.883418250 \times 10^{-1}$	$-1.530858794 \times 10^{-1}$
e_4	$8.039373820 \times 10^{-2}$	$6.041816287 \times 10^{-2}$	$2.784056407 \times 10^{-2}$	$8.309966312 \times 10^{-2}$	$8.745759352 \times 10^{-2}$	$8.405365996 \times 10^{-2}$
e_5	$-1.839145637 \times 10^{-2}$	$-3.862090725 \times 10^{-2}$	$-6.991764499 \times 10^{-2}$	$-1.042397546 \times 10^{-2}$	$-2.453554691 \times 10^{-2}$	$-8.339468685 \times 10^{-3}$
e_6	$7.989300681 \times 10^{-2}$	$5.991260028 \times 10^{-2}$	$3.973221867 \times 10^{-2}$	$8.340835953 \times 10^{-2}$	$6.083380780 \times 10^{-2}$	$7.520172116 \times 10^{-2}$
e_7	$8.974972734 \times 10^{-3}$	$1.970771439 \times 10^{-2}$	$3.618543148 \times 10^{-2}$	$4.996556317 \times 10^{-3}$	$2.937443916 \times 10^{-3}$	$4.883957968 \times 10^{-3}$
d_1	$-1.456880958 \times 10^{-1}$	$-1.655393072 \times 10^{-1}$	$-1.695440612 \times 10^{-1}$	$-7.768719545 \times 10^{-2}$	$-9.729526077 \times 10^{-2}$	$-1.543561121 \times 10^{-1}$
d_2	$-1.456865119 \times 10^{-1}$	$-1.654838828 \times 10^{-1}$	$-1.694958885 \times 10^{-1}$	$-9.273854313 \times 10^{-2}$	$-9.352545297 \times 10^{-2}$	$-1.416874148 \times 10^{-1}$
d_3	$6.536173734 \times 10^{-1}$	$6.485362400 \times 10^{-1}$	$6.463729758 \times 10^{-1}$	$7.077679108 \times 10^{-1}$	$3.492401622 \times 10^{-1}$	$6.745532663 \times 10^{-1}$
d_4	$-2.672431143 \times 10^{-2}$	$-9.908997971 \times 10^{-3}$	$-7.125038541 \times 10^{-3}$	$-6.206323432 \times 10^{-2}$	$-3.131624561 \times 10^{-4}$	$-1.450760251 \times 10^{-2}$
d_5	$7.252226976 \times 10^{-2}$	$8.305477801 \times 10^{-2}$	$8.493509694 \times 10^{-2}$	$3.591048406 \times 10^{-2}$	$4.860114498 \times 10^{-2}$	$7.731646592 \times 10^{-2}$
d_6	$7.252165020 \times 10^{-2}$	$8.302607490 \times 10^{-2}$	$8.491091046 \times 10^{-2}$	$4.408359015 \times 10^{-2}$	$4.677442591 \times 10^{-2}$	$7.101584351 \times 10^{-2}$
d_7	$1.369755530 \times 10^{-2}$	$4.783817066 \times 10^{-3}$	$3.463779833 \times 10^{-3}$	$3.274847844 \times 10^{-2}$	$1.685658610 \times 10^{-4}$	$7.167872219 \times 10^{-3}$
b_1	$7.611612930 \times 10^{-2}$	$8.067613318 \times 10^{-2}$	$8.599282531 \times 10^{-2}$	$8.485269485 \times 10^{-2}$	$8.973660295 \times 10^{-2}$	$9.037768886 \times 10^{-2}$
b_2	$7.611056590 \times 10^{-2}$	$8.067478690 \times 10^{-2}$	$8.576090549 \times 10^{-2}$	$8.464951588 \times 10^{-2}$	$6.510346810 \times 10^{-2}$	$6.325960304 \times 10^{-2}$
b_3	$7.635952696 \times 10^{-2}$	$7.523603305 \times 10^{-2}$	$8.362767072 \times 10^{-2}$	$8.588542258 \times 10^{-2}$	$6.457293532 \times 10^{-2}$	$6.211804033 \times 10^{-2}$
b_4	$3.628944362 \times 10^{-3}$	$2.759218107 \times 10^{-3}$	$2.585400175 \times 10^{-3}$	$1.144594013 \times 10^{-4}$	$1.908643529 \times 10^{-4}$	$1.660505072 \times 10^{-4}$
b_5	$3.949576871 \times 10^{-3}$	$2.477801578 \times 10^{-3}$	$8.770435968 \times 10^{-5}$	$3.114570198 \times 10^{-3}$	$5.485650955 \times 10^{-4}$	$3.096224488 \times 10^{-4}$
b_6	$3.952631340 \times 10^{-3}$	$2.478603936 \times 10^{-3}$	$2.045599559 \times 10^{-4}$	$3.390316869 \times 10^{-5}$	$9.727342349 \times 10^{-3}$	$1.069576718 \times 10^{-2}$
b_7	$9.974222154 \times 10^{-6}$	$6.138514767 \times 10^{-5}$	$1.524868963 \times 10^{-5}$	$1.042364363 \times 10^{-5}$	$6.879278612 \times 10^{-5}$	$5.357530062 \times 10^{-5}$

表 2 当 $\Delta x = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 时, 不同 r_1 和 r_2 情况下 7 点格式的优化系数Table 2 Optimized coefficients for 7-point scheme with different r_1, r_2 values and $\Delta x = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$

	$r_1=1 \ r_2=1$	$r_1=1 \ r_2=2$	$r_1=1 \ r_2=3$	$r_1=2 \ r_2=1$	$r_1=2 \ r_2=2$	$r_1=2 \ r_2=3$
c_1	1.004275735×10^0	1.004623397×10^0	1.004688723×10^0	1.004498033×10^0	1.004760659×10^0	1.004824376×10^0
c_2	$-1.999011439 \times 10^{-3}$	$-2.382586170 \times 10^{-3}$	$-2.452533367 \times 10^{-3}$	$-1.784218541 \times 10^{-3}$	$-2.994787202 \times 10^{-3}$	$-3.269041211 \times 10^{-3}$
c_3	$-1.506861133 \times 10^{-3}$	$-1.488553484 \times 10^{-3}$	$-1.490770355 \times 10^{-3}$	$-1.687039517 \times 10^{-3}$	$-2.237782229 \times 10^{-3}$	$-3.172625191 \times 10^{-3}$
e_1	$-1.999008010 \times 10^{-3}$	$-2.382568736 \times 10^{-3}$	$-2.452541420 \times 10^{-3}$	$-4.390504210 \times 10^{-4}$	$-5.310224808 \times 10^{-4}$	$-5.474097443 \times 10^{-4}$
e_2	1.004275722×10^0	1.004623379×10^0	1.004688675×10^0	1.000394172×10^0	1.000904942×10^0	1.000971925×10^0
e_3	$-1.506849620 \times 10^{-3}$	$-1.488537842 \times 10^{-3}$	$-1.490786693 \times 10^{-3}$	$-3.311167620 \times 10^{-4}$	$-1.829372736 \times 10^{-4}$	$5.026262215 \times 10^{-5}$
d_1	$-2.256187965 \times 10^{-3}$	$-5.609976495 \times 10^{-4}$	$-2.491079264 \times 10^{-4}$	$-2.638821953 \times 10^{-3}$	$-6.630236060 \times 10^{-4}$	$-2.948678606 \times 10^{-4}$
d_2	$-2.256173180 \times 10^{-3}$	$-5.609882033 \times 10^{-4}$	$-2.491034346 \times 10^{-4}$	$-1.010160725 \times 10^{-3}$	$-1.494314961 \times 10^{-4}$	$-6.583240051 \times 10^{-5}$
d_3	1.002989230×10^0	1.000748912×10^0	1.000336064×10^0	1.003019306×10^0	1.000744793×10^0	1.000333484×10^0
b_1	$4.461539811 \times 10^{-2}$	$5.277420657 \times 10^{-2}$	$5.425156845 \times 10^{-2}$	$4.960964443 \times 10^{-2}$	$5.852827273 \times 10^{-2}$	$6.001945148 \times 10^{-2}$
b_2	$4.461540291 \times 10^{-2}$	$5.277418366 \times 10^{-2}$	$5.425156841 \times 10^{-2}$	$1.492746662 \times 10^{-5}$	$2.206948637 \times 10^{-2}$	$2.782939054 \times 10^{-2}$
b_3	$6.608322747 \times 10^{-2}$	$4.161908378 \times 10^{-2}$	$2.136882647 \times 10^{-3}$	$6.882268261 \times 10^{-2}$	$5.348910794 \times 10^{-2}$	$2.873541820 \times 10^{-2}$

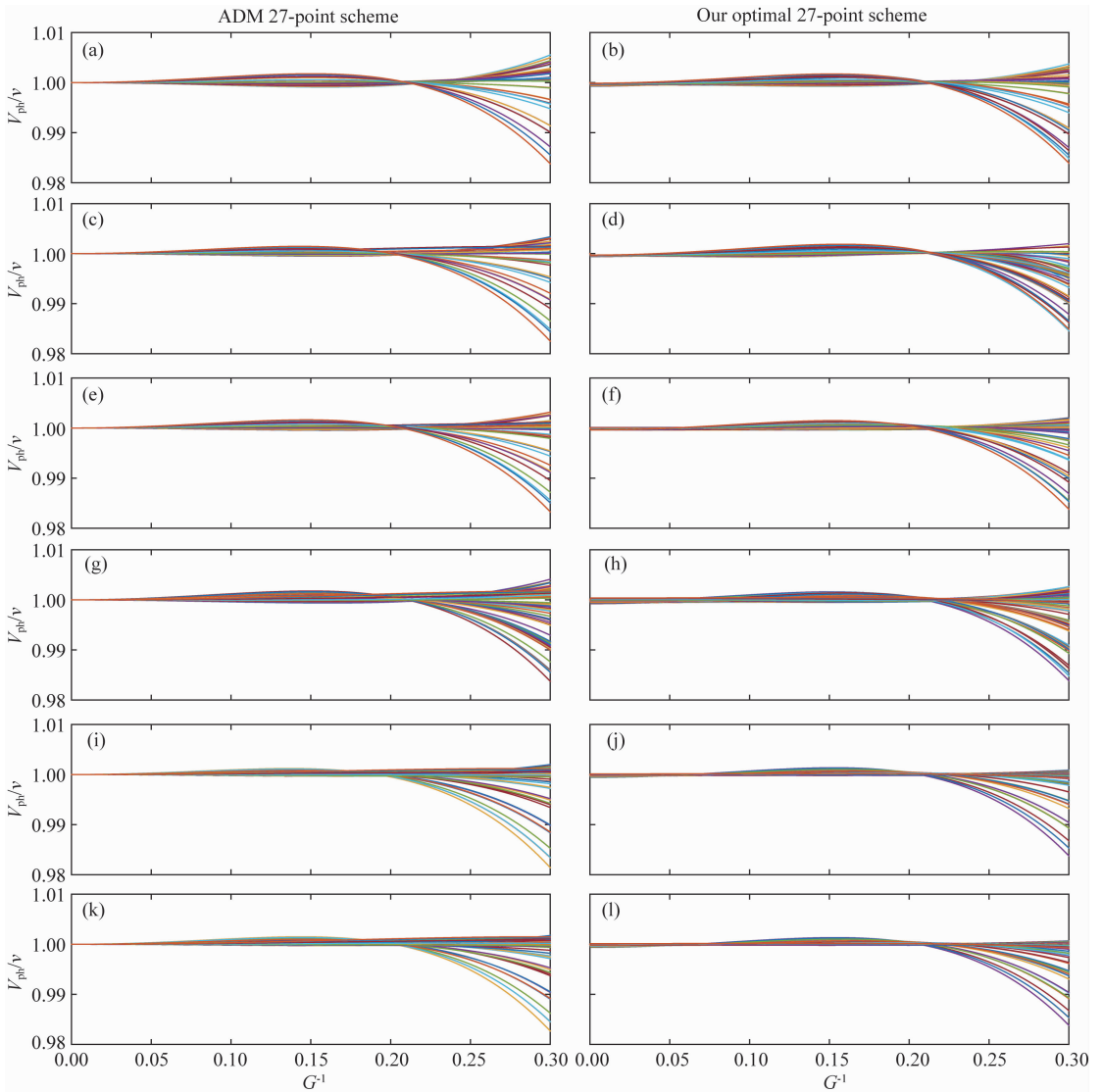


图2 ADM 27点格式和本文优化27点格式频散曲线对比

左列是ADM 27点格式,右列是本文优化27点格式,每行子图对应不同的空间采样比,(a,b) $r_1=1.0, r_2=1.0$; (c,d) $r_1=1.0, r_2=2.0$; (e,f) $r_1=1.0, r_2=3.0$; (g,h) $r_1=2.0, r_2=1.0$; (i,j) $r_1=2.0, r_2=2.0$; (k,l) $r_1=2.0, r_2=3.0$. 子图中不同颜色的曲线代表各种不同的传播方向,传播角度 θ 和 ϕ 取值范围 $[0, \pi/2]$,采样间隔为 $\pi/20$.

Fig. 2 Normalized phase velocity curves for the ADM 27-point scheme (left column) and our optimal 27-point scheme (right column)

Rows from top to bottom are for $r_1=1.0$ and $r_2=1.0$ (a,b), $r_1=1.0$ and $r_2=2.0$ (c,d), $r_1=1.0$ and $r_2=3.0$ (e,f), $r_1=2.0$ and $r_2=1.0$ (g,h), $r_1=2.0$ and $r_2=2.0$ (i,j), $r_1=2.0$ and $r_2=3.0$ (k,l). The colorful curves denote the different propagation directions. The ranges of propagation angles θ and ϕ are both within $[0, \pi/2]$ at an interval of $\pi/20$.

法ADM 27点格式和本文的27点格式在0.16 s时刻 $y=480$ m处 xoz 平面内的波场快照图,图4c和4d分别是波场快照图在深度 $z=480$ m处沿水平方向的横截波形图和在 $x=480$ m处沿垂直方向的横截波形图,图中三条曲线分别对应ADM 27点格式(蓝色曲线),本文的27点格式(红色曲线)以及解析解(黑色曲线)的计算结果.其中,ADM 27点格式与

本文的27点格式的波形曲线完全重合在一起,说明两者的精度基本一致,与前面的频散曲线(图2)分析结果一致.两种数值方法与解析解的波形存在很小的差异,是由于数值误差的存在,如果采用更小的空间网格间距,数值解与解析解的波形差异将会减小.

为了测试7点优化格式的精度,选取一个大小

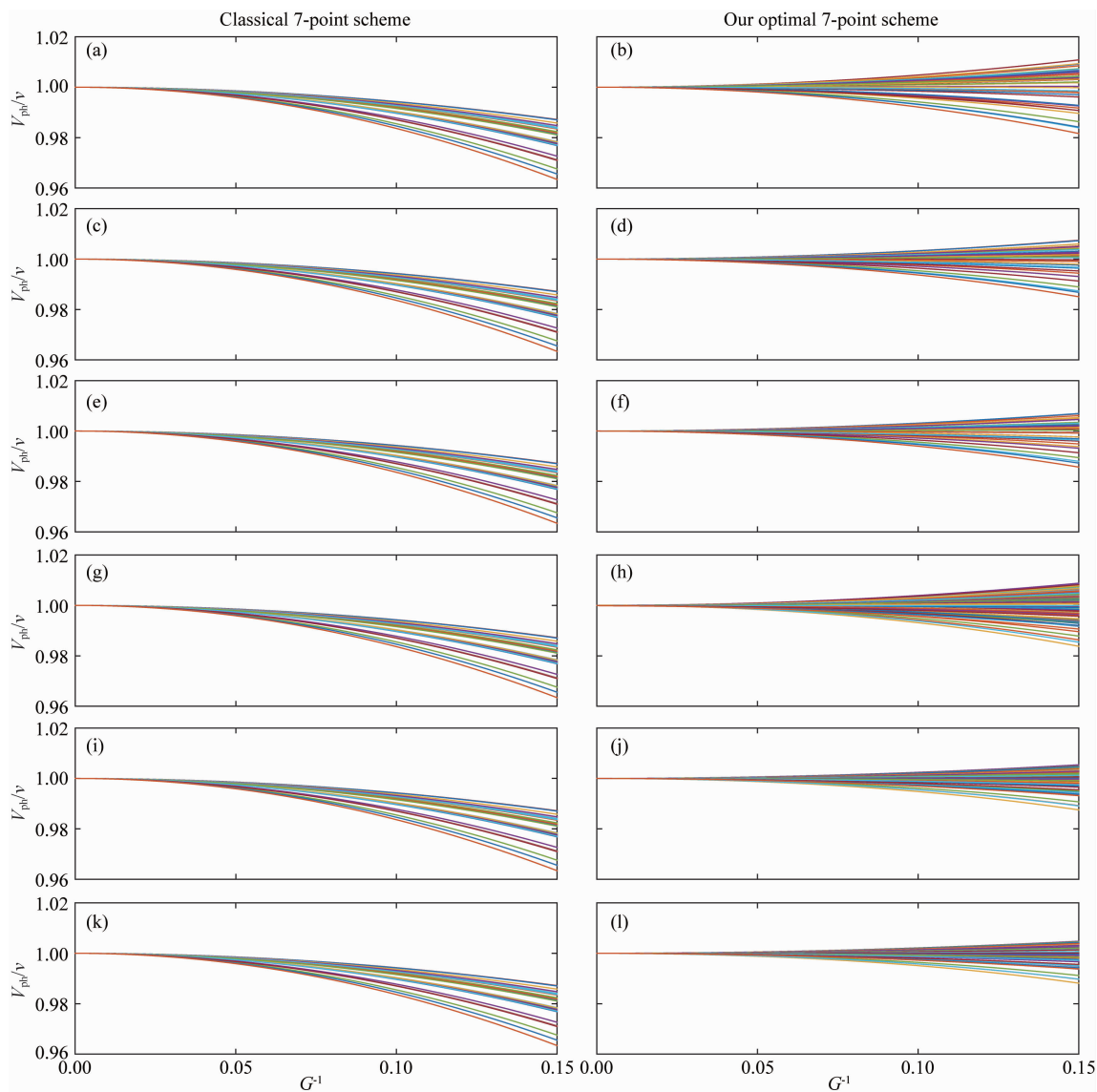


图3 经典的7点格式和本文优化7点格式频散曲线对比

左列是经典的7点格式,右列是本文优化7点格式,每行子图对应不同的空间采样比;(a,b) $r_1=1.0, r_2=1.0$; (c,d) $r_1=1.0, r_2=2.0$; (e,f) $r_1=1.0, r_2=3.0$; (g,h) $r_1=2.0, r_2=1.0$; (i,j) $r_1=2.0, r_2=2.0$; (k,l) $r_1=2.0, r_2=3.0$.子图中不同颜色的曲线代表各种不同的传播方向,传播角度 θ 和 ϕ 取值范围 $[0, \pi/2]$,采样间隔为 $\pi/20$.

Fig. 3 Normalized phase velocity curves for the classical 7-point scheme (left column) and our optimal 27-point scheme (right column)

Rows from top to bottom are for $r_1=1.0$ and $r_2=1.0$ (a,b), $r_1=1.0$ and $r_2=2.0$ (c,d), $r_1=1.0$ and $r_2=3.0$ (e,f), $r_1=2.0$ and $r_2=1.0$ (g,h), $r_1=2.0$ and $r_2=2.0$ (i,j), $r_1=2.0$ and $r_2=3.0$ (k,l). The colorful curves denote the different propagation directions. The ranges of propagation angles θ and ϕ are both within $[0, \pi/2]$ at an interval of $\pi/20$.

为 $840 \text{ m} \times 840 \text{ m} \times 840 \text{ m}$ 的均匀各向同性介质模型,分别采用两种方式进行网格剖分.一种是正方体网格,即 $r_1=r_2=1.0$,空间采样间隔 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=14 \text{ m}$.我们分别使用了经典的7点格式、本文的7点格式以及解析法进行正演计算.图5a和5b是经典7点格式和本文的7点格式在同一时刻 $y=420 \text{ m}$ 处 xoz 平面内的波场快照图,图5c和5d分别是波场快照图在深度 $z=420 \text{ m}$ 处沿水平方向的横截波

形图和在 $x=420 \text{ m}$ 处沿垂直方向的横截波形图,图中三条曲线分别对应经典7点格式(蓝色曲线)、本文的7点格式(红色曲线)以及解析解(黑色曲线)的计算结果.可以看出两种数值方法与解析解的波形差别较大,说明均存在数值频散,但是,经典7点格式比本文的7点格式数值误差更大,其精度更低.为了减少数值误差的影响,减小空间采样间隔,分别采用 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=10 \text{ m}$ 和 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=8 \text{ m}$ 的

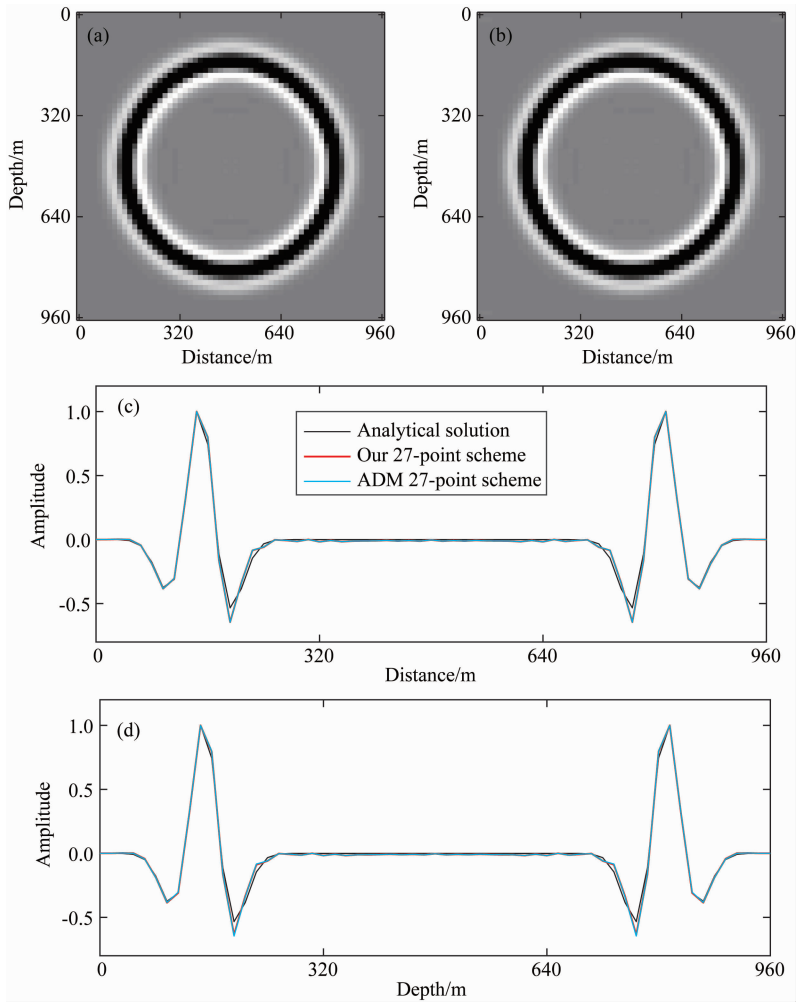


图 4 均匀各向同性介质中 ADM 27 点格式、本文的 27 点格式和解析解的模拟结果对比 (a)和(b) ADM 27 点格式和本文的 27 点格式在 0.16 s 时刻 $y=480$ m 处 xoz 平面内的波场快照图; (c) 两种数值方法的波场快照图在深度 $z=480$ m 处沿水平方向的横截波形图与解析解的对比图; (d) 波场快照图在 $x=480$ m 处沿垂直方向的横截波形图与解析解的对比图, 图中三条不同颜色的曲线分别对应 ADM27 点格式(蓝色曲线)、本文的 27 点格式(红色曲线)以及解析解(黑色曲线)的计算结果。

Fig. 4 Simulation results for ADM 27-point scheme, our optimal 27-point scheme and analytical solution in homogenous media

Panel (a) and (b) are the wavefield snapshots of ADM 27-point scheme and our optimal 27-point scheme at $t=0.16$ s in the xoz plane at the $y=480$ m. Panel (c) is the horizontal cross sections of snapshots at the depth of $z=480$ m comparing with analytical solution. Panel (d) is the vertical cross sections at the distance of $x=480$ m. The curves in three different color represent the simulation waveforms for ADM 27-point scheme (blue), our optimal 27-point scheme (red) and analytical solution (black).

网格间距, 得到与图 5(c 和 d) 类似的横截波形图(图 6, 7), 可以看出经典 7 点格式和本文的 7 点格式均随着采样间距的变小, 数值误差变小。但是, 经典 7 点格式比本文的 7 点格式的数值误差更大(图 6), 说明其精度更低, 当间距进一步减小, 两种方法与解析解基本一致(图 7)。

另一种是长方体网格剖分地下模型, 即 $r_1 = 1.0, r_2 = 2.0 (\Delta x = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z))$, 空间采样间隔 $\Delta x = \Delta y = 14$ m, $\Delta z = 7$ m, 模型网格大小为 $61 \times$

61×121 。图 8(a, b) 是经典 7 点格式和本文的 7 点格式在同一时刻 $y=420$ m 处 xoz 平面内的波场快照图, 图 8c 和 8d 分别是波场快照图在深度 $z=420$ m 处沿水平方向的横截波形图和在 $x=420$ m 处沿垂直方向的横截波形图, 图中三条曲线分别对应经典 7 点格式(蓝色曲线), 本文的 7 点格式(红色曲线)以及解析解(黑色曲线)的计算结果。由于 z 方向上采样间隔较小, 故两种数值方法在有 x 方向上存在较严重的数值频散(图 8c), z 方向上与解析解吻合

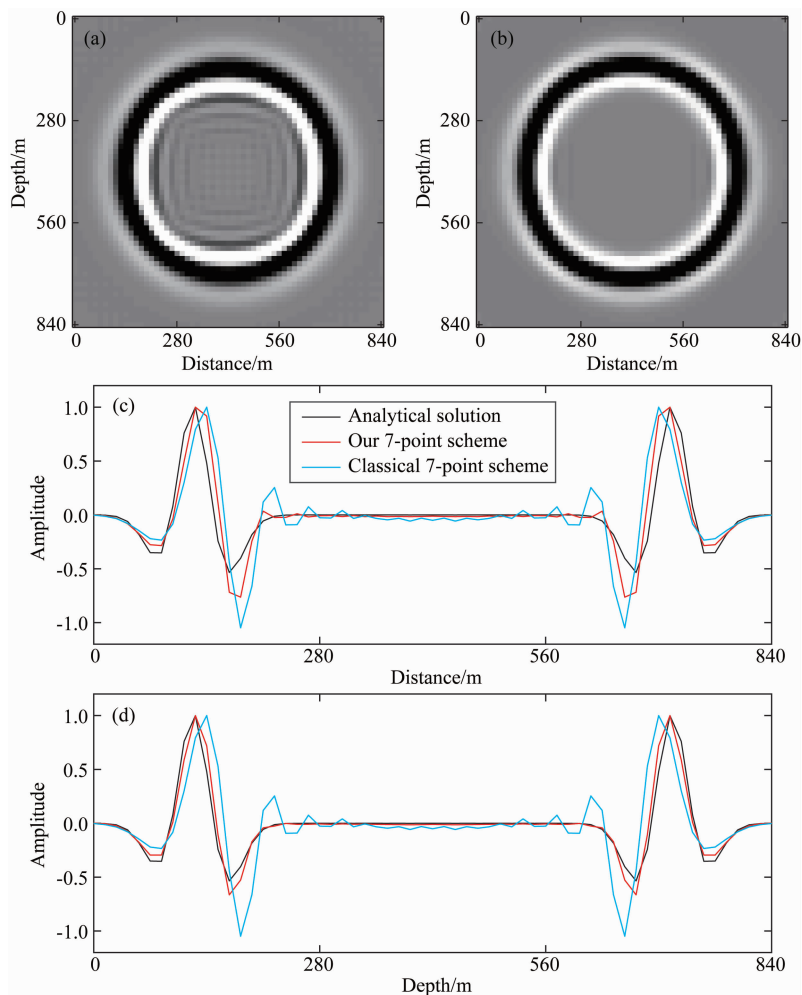


图5 均匀各向同性介质中经典的7点格式、本文的7点格式和解析解的模拟结果对比
(a,b)经典的7点格式和本文的7点格式($r_1=1.0, r_2=1.0$)在同一时刻 $y=420$ m处 xoz 平面内的波场快照图;
(c)两种数值方法的波场快照图在深度 $z=420$ m处沿水平方向的横截波形图与解析解的对比图;(d)波场快照图在 $x=420$ m处沿垂直方向的横截波形图与解析解的对比图,图中三条曲线分别对应经典的7点格式(蓝色曲线)、
本文的7点格式(红色曲线)以及解析解(黑色曲线)的计算结果。

Fig. 5 Simulation results for classical 7-point scheme, our optimal 7-point scheme and analytical solution in homogenous media

Panel (a) and (b) are the wavefield snapshots of classical 7-point scheme and our optimal 7-point scheme ($r_1=1.0, r_2=1.0$) at the same time in the xoz plane at the $y=420$ m. Panel (c) is the horizontal cross sections of snapshots at the depth of $z=420$ m comparing with analytical solution. Panel (d) is the vertical cross sections at the distance of $x=420$ m. The curves in three different color represent the simulation waveforms for classical 7-point scheme (blue), our optimal 7-point scheme (red) and analytical solution (black).

度较高(图8d)。但是无论在 x 还是 z 方向上,本文的7点格式比经典7点格式的数值误差小,说明本文的7点格式精度更高,验证了图3中的理论频散分析。

此外,为了说明本文的7点格式和27点格式在非均匀介质中的适用性,采用一个具有起伏界面的双层介质,模型大小为 $480\text{ m} \times 480\text{ m} \times 480\text{ m}$,界面形状如图9a所示,上层速度为 $3000\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,下层速度为 $4000\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。分别采用本文的7点格式、27点格式以及时间域有限差分(TDFD)模拟方法进行

正演计算,震源时间函数与前面的均匀模型一致,震源位于 $(240\text{ m}, 240\text{ m}, 224\text{ m})$ 处,空间采样间距为 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=8\text{ m}$,图9b、9c和9d分别是本文的7点格式、27点格式和TDFD方法在同一时刻 $y=240\text{ m}$ 处 xoz 平面内的波场快照图,图9(e,f)分别是波场快照图在深度 $z=240\text{ m}$ 处沿水平方向的横截波形图和在 $x=240\text{ m}$ 处沿垂直方向的横截波形图,可以看出两种频率域模拟方法与时间域有限差分数值解均具有较好的一致性。

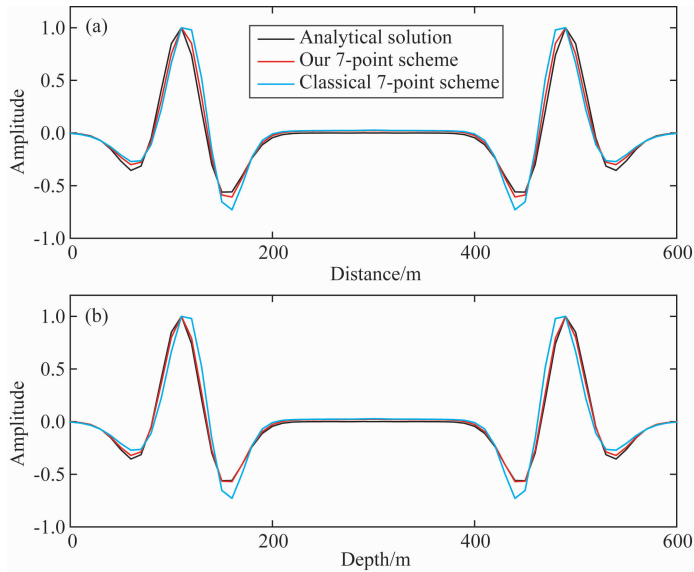


图 6 均匀各向同性介质中经典的 7 点格式(蓝色曲线)、本文的 7 点格式(红色曲线)和解析解(黑色曲线)的模拟结果对比

两种数值方法的空间采样间隔均为 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 10$ m. (a) 在 $y = 300$ m, $z = 300$ m 处沿水平方向的横截波形图与解析解的对比图; (b) 在 $x = 300$ m, $y = 300$ m 处沿垂直方向的横截波形图与解析解的对比图.

Fig. 6 Simulation results for classical 7-point scheme (blue line), our optimal 7-point scheme (red line) and analytical solution (black line) in homogenous media

The spatial intervals for two numerical methods are $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 10$ m. Panel (a) are the horizontal waveforms along the line of $y = 300$ m, $z = 300$ m for three methods. Panel (b) are the vertical waveforms along the line of $x = 300$ m, $y = 300$ m for three methods.

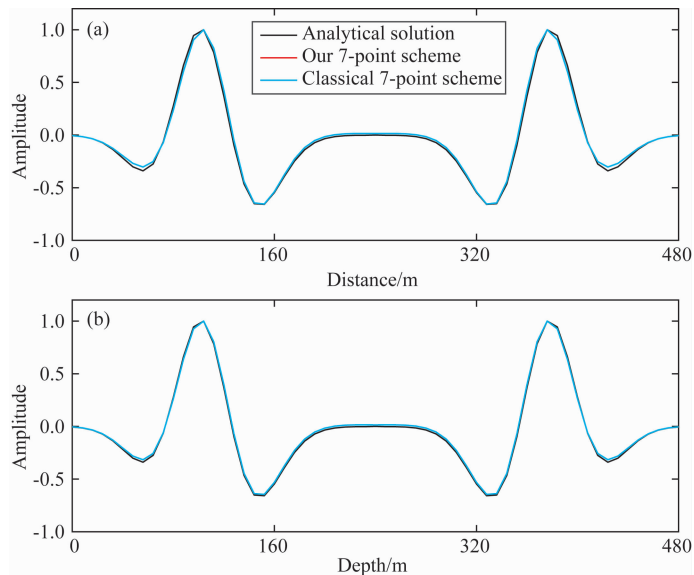


图 7 均匀各向同性介质中经典的 7 点格式(蓝色曲线)、本文的 7 点格式(红色曲线)和解析解(黑色曲线)的模拟结果对比

两种数值方法的空间采样间隔均为 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 8$ m. (a) 在 $y = 240$ m, $z = 240$ m 处沿水平方向的横截波形图与解析解的对比图; (b) 在 $x = 240$ m, $y = 240$ m 处沿垂直方向的横截波形图与解析解的对比图.

Fig. 7 Simulation results for classical 7-point scheme (blue line), our optimal 7-point scheme (red line) and analytical solution (black line) in homogenous media

The spatial intervals for two numerical method are $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 8$ m. Panel (a) are the horizontal waveforms along the line of $y = 240$ m, $z = 240$ m for three methods. Panel (b) are the vertical waveforms along the line of $x = 240$ m, $y = 240$ m for three methods.

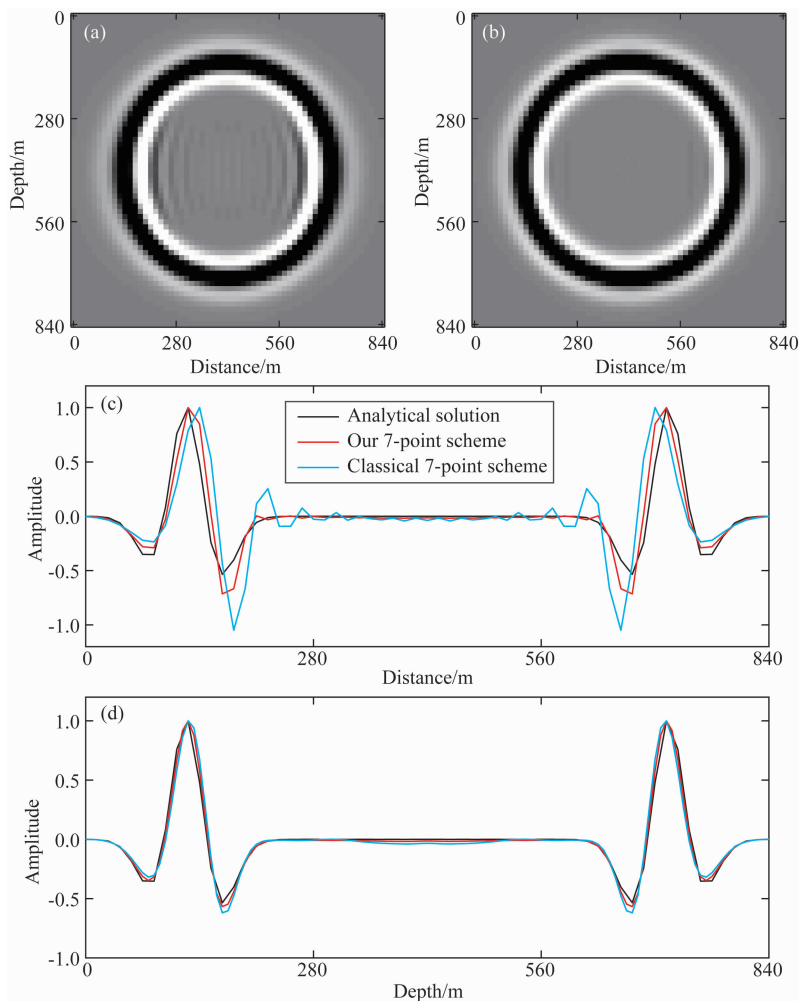


图 8 均匀各向同性介质中经典的 7 点格式、本文的 7 点格式和解析解的模拟结果对比

(a, b) 经典的 7 点格式和本文的 7 点格式 ($r_1=1.0, r_2=2.0$) 在同一时刻 $y=420$ m 处 xoz 平面内的波场快照图; (c) 两种数值方法的波场快照图在深度 $z=420$ m 处沿水平方向的横截波形图与解析解的对比图; (d) 波场快照图在 $x=420$ m 处沿垂直方向的横截波形图与解析解的对比图, 图中三条曲线分别对应经典的 7 点格式 (蓝色曲线)、本文的 7 点格式 (红色曲线) 以及解析解 (黑色曲线) 的计算结果。

Fig. 8 Simulation results for classical 7-point scheme, our optimal 7-point scheme and analytical solution in homogenous media

Panel (a) and (b) are the wavefield snapshots of classical 7-point scheme and our optimal 7-point scheme ($r_1=1.0, r_2=2.0$) at the same time in the xoz plane at the $y=420$ m. Panel (c) is the horizontal cross sections of panel a and b at the depth of $z=420$ m comparing with analytical solution. Panel (d) is the vertical cross sections at the distance of $x=420$ m. The curves in three different color represent the simulation waveforms for classical 7-point scheme (blue), our optimal 7-point scheme (red) and analytical solution (black).

3 结论

基于 3D 声波方程, 我们发展了一种新的频率域正演优化方法。此方法的优势在于: 只要给定 FD 模板, 即可直接构造频散方程, 求解对应的优化系数, 其优化系数对应于频率域 FD 算子的各个节点, 可扩展优化其他格式, 适应性较广。运用此优化方法, 我们计算得到了不同空间采样间距比情况下 27 点和 7 点格式的优化系数。理论频散分析和数值实验表明我们的 27 点格式与 ADM 27 点格式有相同

的精度, 7 点格式比经典的 7 点格式具有更小的数值频散, 经典的 7 点格式最小波长网格点数需要达到 12.7 个, 而我们的优化 7 点格式需要 8.8 个。

致谢 谨此祝贺姚振兴先生从事地球物理教学科研工作 60 周年。

附录

差分格式 (4) 实际上是一种通用的 3D 频率域有限差分格式, 包含了 ADM 27 点格式和经典的 7 点格式。

令

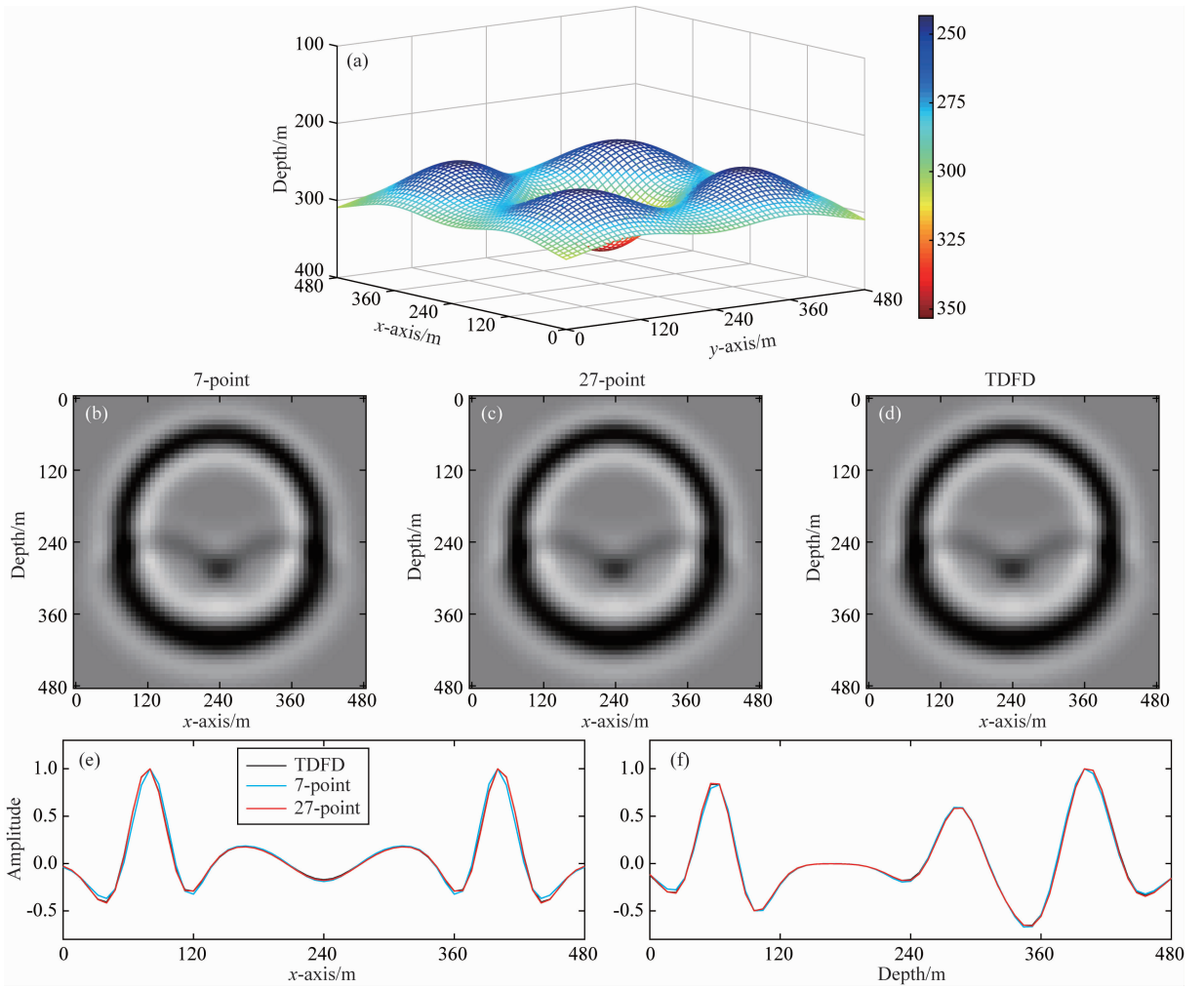


图9 具有起伏界面的双层介质模型的数值模拟结果

模型大小为 $480\text{ m} \times 480\text{ m} \times 480\text{ m}$, (a) 界面起伏形状; (b, c, d) 分别是采用本文的7点格式、27点格式和时间域有限差分(TDFD)模拟方法计算得到的在同一时刻 $y=240\text{ m}$ 处 xoz 平面内的波场快照图; (e, f) 分别是波场快照图在深度 $z=240\text{ m}$ 处沿水平方向的横截波形图和在 $x=240\text{ m}$ 处沿垂直方向的横截波形图. 图中三条不同颜色的曲线分别对应本文的7点格式(蓝色曲线)、本文的27点格式(红色曲线)以及TDFD方法(黑色曲线)的计算结果.

Fig. 9 Simulation results for a two-layer model with a undulating interface using different numerical methods

The size of the model is $480\text{ m} \times 480\text{ m} \times 480\text{ m}$. Panel (a) is the shape of the velocity interface. Panel (b, c, d) are the wavefield snapshots for our optimal 7-point scheme, our optimal 27-point scheme and TDFD method at the same time in the xoz plane at the $y=240\text{ m}$. Panel (e) is the horizontal cross sections of snapshots at the depth of $z=240\text{ m}$. Panel f is the vertical cross sections at the distance of $x=240\text{ m}$. The three different color curves represent the simulation waveform for our optimal 7-point scheme (blue), our optimal 27-point scheme (red) and analytical solution (black).

$$\begin{aligned} c_0 &= -2, c_1 = 1, c_i = 0 \quad (i = 2, 3, 4, 5, 6, 7) \\ e_0 &= -2, e_2 = 1, e_i = 0 \quad (i = 1, 3, 4, 5, 6, 7) \\ d_0 &= -2, d_3 = 1, d_i = 0 \quad (i = 1, 2, 4, 5, 6, 7) \\ b_0 &= 1, b_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 7) \end{aligned}$$

差分格式(4)即转化为经典的7点格式.

令

$$\begin{aligned} c_0 &= -2(1 - 4\alpha_1^{\text{Chen}} - 4\alpha_2^{\text{Chen}}), c_1 = 1 - 4\alpha_1^{\text{Chen}} - 4\alpha_2^{\text{Chen}}, \\ c_2 &= -2\alpha_1^{\text{Chen}}, c_3 = -2\alpha_1^{\text{Chen}}, c_4 = \alpha_1^{\text{Chen}}, \\ c_5 &= \alpha_1^{\text{Chen}}, c_6 = -2\alpha_2^{\text{Chen}}, c_7 = \alpha_2^{\text{Chen}}. \\ e_0 &= -2(1 - 4\beta_1^{\text{Chen}} - 4\beta_2^{\text{Chen}}), e_1 = -2\beta_1^{\text{Chen}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= 1 - 4\beta_1^{\text{Chen}} - 4\beta_2^{\text{Chen}}, e_3 = -2\beta_1^{\text{Chen}}, \\ e_4 &= \beta_1^{\text{Chen}}, e_5 = -2\beta_2^{\text{Chen}}, e_6 = \beta_1^{\text{Chen}}, e_7 = \beta_2^{\text{Chen}}. \\ d_0 &= -2(1 - 4\gamma_1^{\text{Chen}} - 4\gamma_2^{\text{Chen}}), d_1 = -2\gamma_1^{\text{Chen}}, \\ d_2 &= -2\gamma_1^{\text{Chen}}, d_3 = 1 - 4\gamma_1^{\text{Chen}} - 4\gamma_2^{\text{Chen}}, \\ d_4 &= -2\gamma_2^{\text{Chen}}, d_5 = \gamma_1^{\text{Chen}}, d_6 = \gamma_1^{\text{Chen}}, d_7 = \gamma_2^{\text{Chen}}. \\ b_0 &= c^{\text{Chen}}, b_1 = d^{\text{Chen}}, b_2 = d^{\text{Chen}}, b_3 = d^{\text{Chen}}, \\ b_4 &= e^{\text{Chen}}, b_5 = e^{\text{Chen}}, b_6 = e^{\text{Chen}}, b_7 = f^{\text{Chen}}. \end{aligned}$$

其中,满足 $c^{\text{Chen}} + 6d^{\text{Chen}} + 12e^{\text{Chen}} + 8f^{\text{Chen}} = 1$. 差分格式(4)即转化为 ADM 27点格式(Chen 2014).

References

- Brossier R, Operto S, Virieux J. 2009. Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion. *Geophysics*, 74(6): WCC105-WCC118, doi: 10.1190/1.3215771.
- Cao S H, Chen J B. 2012. A 17-point scheme and its numerical implementation for high-accuracy modeling of frequency-domain acoustic equation. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 55(10): 3440-3449, doi: 10.6038/j.issn.0001-5733.2012.10.027.
- Chen J B. 2012. An average-derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation. *Geophysics*, 77(6): T201-T210, doi: 10.1190/geo2011-0389.1.
- Chen J B. 2014. A 27-point scheme for a 3D frequency-domain scalar wave equation based on an average-derivative method. *Geophysical Prospecting*, 62(2): 258-277, doi: 10.1111/1365-2478.12090.
- Chen J B, Cao J. 2016. Modeling of frequency-domain elastic-wave equation with an average-derivative optimal method. *Geophysics*, 81(6): T339-T356, doi: 10.1190/geo2016-0041.1.
- Chu C L, Stoffa P L. 2012. Determination of finite-difference weights using scaled binomial windows. *Geophysics*, 77(3): W17-W26, doi: 10.1190/geo2011-0336.1.
- Fan N, Zhao L F, Xie X B, et al. 2017. A general optimal method for a 2D frequency-domain finite-difference solution of scalar wave equation. *Geophysics*, 82(3): T121-T132, doi: 10.1190/geo2016-0457.1.
- Gu B L, Liang G H, Li Z Y. 2013. A 21-point finite difference scheme for 2D frequency-domain elastic wave modelling. *Exploration Geophysics*, 44(3): 156-166, doi: 10.1071/EG12064.
- Holberg O. 1987. Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena. *Geophysical Prospecting*, 35(6): 629-655, doi: 10.1111/j.1365-2478.1987.tb00841.x.
- Hustedt B, Operto S, Virieux J. 2004. Mixed-grid and staggered-grid finite-difference methods for frequency-domain acoustic wave modelling. *Geophysical Journal International*, 157(3): 1269-1296, doi: 10.1111/j.1365-246X.2004.02289.x.
- Jo C H, Shin C, Suh J H. 1996. An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-D scalar wave extrapolator. *Geophysics*, 61(2): 529-537, doi: 10.1190/1.1443979.
- Kim Y, Min D J, Shin C. 2011. Frequency-domain reverse-time migration with source estimation. *Geophysics*, 76(2): S41-S49, doi: 10.1190/1.3534831.
- Liu L, Liu H, Liu H W. 2013. Optimal 15-point finite difference forward modeling in frequency-space domain. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 56(2): 644-652, doi: 10.6038/cjg20130228.
- Liu Y, Sen M K. 2009. A new time-space domain high-order finite-difference method for the acoustic wave equation. *Journal of Computational Physics*, 228(23): 8779-8806, doi: 10.1016/j.jcp.2009.08.027.
- Loewenthal D, Mufti I R. 1983. Reversed time migration in spatial frequency domain. *Geophysics*, 48(5): 627-635, doi: 10.1190/1.1441493.
- Min D J, Shin C, Kwon B D, et al. 2000. Improved frequency-domain elastic wave modeling using weighted-averaging difference operators. *Geophysics*, 65(3): 884-895, doi: 10.1190/1.1444785.
- Operto S, Virieux J, Amestoy P, et al. 2007. 3D finite-difference frequency-domain modeling of visco-acoustic wave propagation using a massively parallel direct solver: A feasibility study. *Geophysics*, 72(5): SM195-SM211, doi: 10.1190/1.2759835.
- Operto S, Virieux J, Ribodetti A, et al. 2009. Finite-difference frequency-domain modeling of viscoacoustic wave propagation in 2D tilted transversely isotropic (TTI) media. *Geophysics*, 74(5): T75-T95, doi: 10.1190/1.3157243.
- Operto S, Brossier R, Combe L, et al. 2014. Computationally efficient three-dimensional acoustic finite-difference frequency-domain seismic modeling in vertical transversely isotropic media with sparse direct solver. *Geophysics*, 79(5): T257-T275, doi: 10.1190/geo2013-0478.1.
- Plessix R E, Mulder W A. 2004. Frequency-domain finite-difference amplitude-preserving migration. *Geophysical Journal International*, 157(3): 975-987, doi: 10.1111/j.1365-246X.2004.02282.x.
- Pratt R G, Worthington M H. 1990. Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. Part 1: Acoustic wave-equation method. *Geophysical Prospecting*, 38(3): 287-310, doi: 10.1111/j.1365-2478.1990.tb01846.x.
- Pratt R G. 1999. Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 1: Theory and verification in a physical scale model. *Geophysics*, 64(3): 888-901, doi: 10.1190/1.1444597.
- Shin C, Sohn H. 1998. A frequency-space 2-D scalar wave extrapolator using extended 25-point finite-difference operator. *Geophysics*, 63(2): 289-296, doi: 10.1190/1.1444323.
- Štekl I, Pratt R G. 1998. Accurate viscoelastic modeling by frequency-domain finite differences using rotated operators. *Geophysics*, 63(5): 1779-1794, doi: 10.1190/1.1444472.
- Tang X D, Liu H, Zhang H, et al. 2015. An adaptable 17-point scheme for high-accuracy frequency-domain acoustic wave modeling in 2D constant density media. *Geophysics*, 80(6): T211-T221, doi: 10.1190/geo2014-0124.1.
- Zhang H, Liu H, Liu L, et al. 2014. Frequency domain acoustic equation high-order modeling based on an average-derivative method. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 57(5): 1599-1611, doi: 10.6038/cjg20140523.
- Zhang J H, Yao Z X. 2012. Optimized finite-difference operator for broadband seismic wave modeling. *Geophysics*, 78(1): A13-A18, doi: 10.1190/geo2012-0277.1.
- Zhang J H, Yao Z X. 2013. Optimized explicit finite-difference schemes for spatial derivatives using maximum norm. *Journal of Computational Physics*, 250: 511-526, doi: 10.1016/j.jcp.2013.04.029.

附中文参考文献

- 曹书红, 陈景波. 2012. 声波方程频率域高精度正演的 17 点格式及数值实现. *地球物理学报*, 55(10): 3440-3449, doi: 10.6038/j.issn.0001-5733.2012.10.027.
- 刘璐, 刘洪, 刘红伟. 2013. 优化 15 点频率-空间域有限差分正演模拟. *地球物理学报*, 56(2): 644-652, doi: 10.6038/cjg20130228.
- 张衡, 刘洪, 刘璐等. 2014. 基于平均导数方法的声波方程频率域高阶正演. *地球物理学报*, 57(5): 1599-1611, doi: 10.6038/cjg20140523.